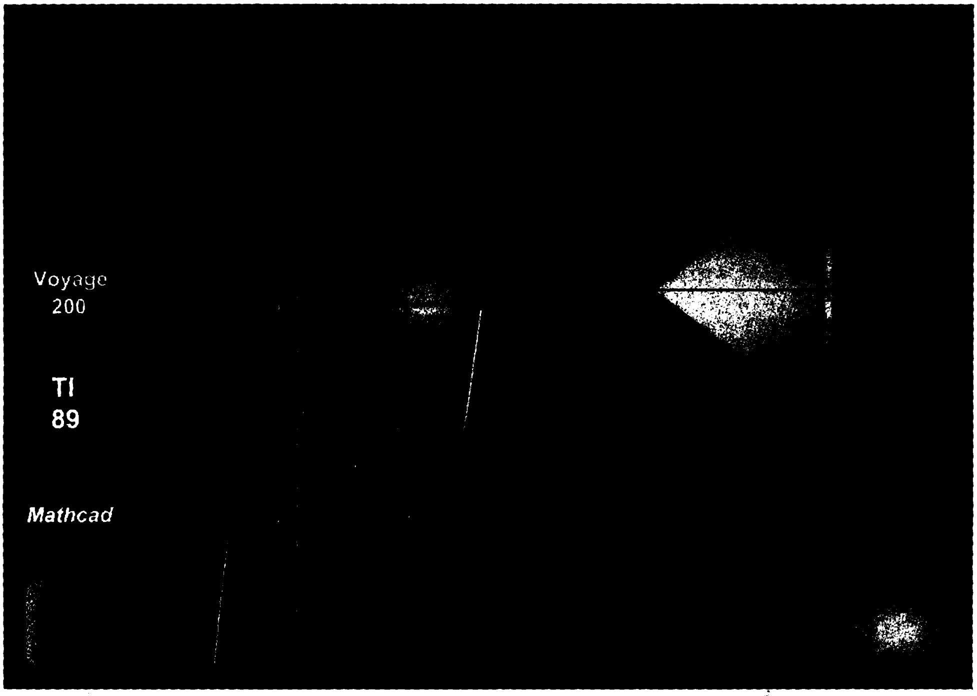
Ingenieur-Mathematik 3



Durchgerechnete Lösungen

E. DORNER

1 Folgen und Reihen

1.1 a) $\langle 2n\rangle = \langle 2;4;6;8;10;12;...\rangle$ b) $\langle(-1)^n\rangle = \langle -1;+1;-1;+1;-1;+1;...\rangle$

c) $\langle n^3-n^2\rangle = \langle 0;4;18;48;100;180;...\rangle$ d) $\langle n\cdot 2^{-n}\rangle = \left\langle \frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{8};\frac{1}{4};\frac{5}{32};\frac{3}{32};...\right\rangle$

e) $\left\langle\frac{n-1}{n+1}\right\rangle = \left\langle 0;\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{7};...\right\rangle$ f) $\left\langle\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\rangle = \left\langle 0;\frac{3}{5};\frac{4}{5};\frac{15}{17};\frac{12}{13};\frac{35}{37};...\right\rangle$

g) $\left\langle\frac{4n-1}{(n+1)^2}\right\rangle = \left\langle \frac{3}{4};\frac{7}{9};\frac{11}{16};\frac{3}{5};\frac{19}{36};\frac{23}{49};...\right\rangle$ h) $\langle(-1)^{2n+1}\rangle = \langle -1;-1;-1;-1;-1;-1;...\rangle$

i) $\langle(-1)^{n+1}\rangle = \langle +1;-1;+1;-1;+1;-1;...\rangle$ j) $\langle 1-(-1)^n\rangle = \langle 2;0;2;0;2;0;...\rangle$

k) $\langle\cos(n\cdot\pi)\rangle = \langle -1;+1;-1;+1;-1;+1;...\rangle$ l) $\langle\sin(n\cdot\pi)\rangle = \langle 0;0;0;0;0;0;...\rangle$

m) $\langle 1-\cos(n\cdot\pi)\rangle = \langle 2;0;2;0;2;0;...\rangle$ n) $\langle 1+\cos^2(n\cdot\pi)\rangle = \langle 2;2;2;2;2;2;...\rangle$

o) $\left\langle\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right\rangle = \langle 0;-1;0;+1;\ 0;-1;...\rangle$ p) $\left\langle\sin^2\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right\rangle = \langle 1;0;1;0;1;0;...\rangle$

1.2 a) $a_n = \langle 1;4;1;16;1;64;...\rangle$ b) $x_n = \langle 2;1;4;3;6;5;...\rangle$

1.3 a) $\langle 1;1;1;1;1;1;...\rangle$ b) $\langle 1;-1;+1;-1;+1;-1;...\rangle$

c) $\langle 2;3;4;5;6;7;...\rangle$ d) $\langle 1;2;4;8;16;32;...\rangle$

e) $\langle 0;-2;0;-2;0;-2;...\rangle$ e) $\langle 1;1{,}1;1{,}11;1{,}111;1{,}1111;1{,}11111;...\rangle$

1.4 a) $\langle 1;1;3;7;17;41;...\rangle$ b) $\langle 0;1;2;3;4;5;...\rangle$ c) $\langle 1;1;0;-1;-1;0;...\rangle$

d) $\langle 0;1;0{,}5;0{,}75;0{,}625;0{,}6875;...\rangle$ e) $\langle 2;1;3;2;2;2{,}\dot{3};...\rangle$

1.5 a) $x_n = \langle 2;2;2;3;3;3;3;3;4;4;...\rangle$ z.B.: $\mathrm{int}(1+\sqrt{5}) = \mathrm{int}(3{,}23..) = 3$

b) $y_n = \langle 0;2;2;4;4;6;6;8;8;10;...\rangle$ z.B.: $2\cdot\mathrm{int}\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\mathrm{int}(2{,}5) = 2\cdot 2 = 4$

c) $u_n = \langle 1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;...\rangle$ z.B.: $5:2 = ...$ Rest 1; $6:2 = ...$ Rest 0

d) $v_n = \langle 1;2;0;1;2;0;1;2;0;1;...\rangle$ z.B.: $5:3 = ...$ Rest 2; $6:3 = ...$ Rest 0

1.6 a) $\langle 2;5;8;\ ...\rangle \Rightarrow a_n = 3n-1$ b) $\langle 10;9;8;\ ...\rangle \Rightarrow b_n = 11-n$

c) $\langle 0;0{,}1;0{,}2;\ ...\rangle \Rightarrow u_n = \frac{n-1}{10}$ d) $\langle 2;6;18;54;\ ...\rangle \Rightarrow a_n = 2\cdot 3^{n-1}$

e) $\langle 2;1;0{,}5;0{,}25;\ ...\rangle \Rightarrow u_n = 2^{2-n}$ f) $\langle 1;-1;1;-1;\ ...\rangle \Rightarrow u_n = (-1)^{n+1}$

1.7

n	x_n
1	2
2	1,5
3	1,29630
4	1,26093
5	1.25992

1.8 a) ⟨ 1, 8, 11, 10, 5, 12, 15, 14, 9, 0, 3, 2, 13, 4, 7, 6, 1, ...⟩
b) ⟨ 0, 3, 8, 11, 0, ... ⟩
c) ⟨ 6, 7, 13, 1, 9, 9, 9, ... ⟩
d) ⟨ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 0, 1, 2, 3, ... ⟩

1.9 a) $a_n = 46$, $s_n = 375$ b) $a_1 = 2$, $s_n = 893$ c) $d = 7$; $s_n = 872$
d) $n = 19$; $s_n = 1463$ e) $a_n = 18$; $s_n = 558$ f) $a_1 = 4$; $a_n = 37$

1.10 a) $a_1 = 1$; $a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4d = 10 \Rightarrow d = 2{,}25$; $\langle 1; 3{,}25; 5{,}5; 7{,}75; 10 \rangle$
b) $\langle 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \rangle$

1.11 $a_1 = 3$; $n = 34$, $a_{34} = 135$; $\Rightarrow a_{34} = a_1 + 33 \cdot d \Rightarrow d = 4$; $\langle 3, 7, 11, 15, \ldots \rangle$

1.12 $a_1 + (n-1) \cdot d > 1000$; $4 + (n-1) \cdot 5 > 1000 \Rightarrow n > \frac{1001}{5} = 200{,}2$; das 201-te Glied $a_{201} = 1004$

1.13 a) $a_1 = 205$; $d = -12$ m/s $= -43{,}2$ km/h ; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 50 \Rightarrow n = 4{,}59$; nach 3,59 s
b) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 0 \Rightarrow n = 5{,}75$ s; nach 4,75 s

1.14 2 Punkte: $P_1(1/1)$, $P_2(2/1{,}8)$; $y = k \cdot x + d$; $k = 0{,}8$; P_1: $1 = 0{,}8 \cdot 1 + d \Rightarrow d = 0{,}2$: $y = 0{,}8 \cdot x + 0{,}2$

1.15 $a_{n-1} = a_n - d$; $a_{n+1} = a_n + d$; $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n$

1.16 $a_1 = 1$; $a_n = n$; $d = 1$; $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (1 + n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

1.17 $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = s_{12}$; $a_1 = 1$; $a_{12} = 12$; $n = 12 \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = 6 \cdot 13 = 78$ Schläge

1.18 $a_1 = 12$; $a_8 = 68$; $n = 8$; $a_8 = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow d = 8$; $\langle 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68 \rangle$; $s_8 = 320$

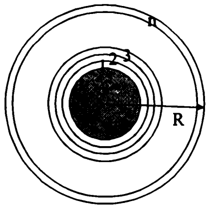
1.19 $n = 11$; $s_{11} = 30 + 29 + .. + 20$; $a_1 = 30$; $a_{11} = 20$; $s_n = \frac{11}{2} \cdot (30 + 20) = 275$ Rundstäbe

1.20 K_1 = Endkapital der Einlage am 1. Jänner, K_2 = Endkapital der Einlage am 1. Feber usw.
$K_1 = 60 + \frac{60 \cdot 0{,}04 \cdot 12}{12} = 62{,}4$; $K_2 = 60 + \frac{60 \cdot 0{,}04 \cdot 11}{12} = 62{,}2$ usw. $d = -0{,}2$;
Endkapital aller Einlagen $s_{12} = \frac{12}{2} \cdot [2 \cdot 62{,}4 + (12-1) \cdot (-0{,}2)] =$ € 735,60

1.21 $a_1 = 30$; $d = 4$; $n = 20$; $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) = 10 \cdot (60 + 19 \cdot 4) =$ € 1360,-

1.22 a) s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ... Weg (in Meter) nach einer, zwei, drei, vier, fünf usw. Sekunden
$s_1 = 5$; $s_2 = 20$; $s_3 = 45$, $s_4 = 80$, $s_5 = 125$ usw.;
$a_1 = 5 - 0 = 5$; $a_2 = 20 - 5 = 15$; $a_3 = 45 - 20 = 25$; $a_4 = 80 - 45 = 35$; $a_5 = 125 - 80 = 45$ usw.
arithmetische Folge mit $d = 10$
b) $s_{10} = 500$ m c) $s_{10} = 15 + 25 + \ldots = \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot 5 + (10-1) \cdot 10] = 500$ m

1.23 Papierstärke: b;
1. Schicht: $u_1 = 2\pi r$; 2. Schicht: $u_2 = 2\pi \cdot r + b)$;
3. Schicht: $u_3 = 2\pi \cdot r + 2b)$; usw. n-te Schicht: $u_n = 2\pi \cdot [r + (n-1) \cdot b]$;
$\langle u_n \rangle$ ist eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied u_1 und der Differenz $d = 2\pi \cdot b$; Gesamtlänge $L = n \cdot \pi\, [2r + (n-1) \cdot b]$;
$n = \frac{R-r}{b}$; $L = \pi \cdot \frac{R-r}{b}(R + r - b) \approx \frac{\pi}{b} \cdot (R^2 - r^2) \approx 7540$ m



1.24 Es handelt sich durchwegs um arithmetische Reihen
a) $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 20$: $s_{20} = 210$ b) $a_1 = 3$; $d = 2$; $n = 15$; $s_{15} = 255$
c) $2{,}5 + 3 + 3{,}5 \ldots + 10$, $a_1 = 2{,}5$; $d = 0{,}5$, $n = 16$: $s_{16} = 100$
d) $-4 + (-3{,}5) + (-3) + \ldots + 6$; $a_1 = -4$; $d = 0{,}5$; $n = 21$; $s_{21} = 21$

1.25 a) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ b) $a_n = 10 \cdot 0{,}1^{n-1} = 10^{2-n}$ c) $a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-3}$ d) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{5^{n-1}}$

1.26 a) $a_n = 364{,}5$; $s_n = 546{,}5$ b) $a_1 = 0{,}2$; $s_n = 51$ c) $q = 0{,}5$; $s_n = 79{,}6875$
d) $n = 8$; $s_n = 199{,}21875$ e) $q = -2$; $s_n = -136{,}5$ f) $n = 8$; $a_n = 64$

1.27 $a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ und $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$ sind drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Reihe;
$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} = \sqrt{a_1^2 \cdot (q^{n-1})^2} = a_1 q^{n-1} = a_n$

1.28 2 Punkte: $P_1(1/2)$, $P_2(2/2 \cdot 1{,}2)$; $y = c \cdot a^x$; $x = 1$: $y = c \cdot a^1 = 2$; $c = \frac{2}{a}$;

$x = 2$: $y = c \cdot a^2 = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a = 2{,}4 \Rightarrow a = 1{,}2$; damit: $c = \frac{2}{1{,}2}$; $y = y = \frac{2}{1{,}2} \cdot 1{,}2^x = 2 \cdot 1{,}2^{x-1}$

1.29 $p_5 = p_0 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{p_5/p_0} = 1{,}0371 \approx 1{,}037$; mittlere Preissteigerung etwa 3,7%

1.30 $U_5 = U_1 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{U_5/U_1} = 1{,}0746 \approx 1{,}075$; durchschnittliche Steigerung also etwa 7,5%

1.31 $a_0 = 140000$; $q = 0{,}99$; $n = 10 \Rightarrow 140000 \cdot 0{,}99^{10} \approx 126600$

1.32 a) am Ende des Tages vor dem 30. Tag, also nach 29 Tagen
b) nach 28 Tagen c) nach 27 Tagen

1.33 $a_1 = 1$; $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot q^{n-1} = q^{n-1}$; $a_{21} = q^{20} = 10 \Rightarrow q = \sqrt[20]{10} = 1{,}122$;

$\langle 1, \sqrt[20]{10}, \sqrt[20]{10^2} \ldots, \sqrt[20]{10^{20}} = 10 \rangle = \langle 1; 1{,}122; 1{,}259; \ldots, 8{,}913; 10 \rangle$

1.34 $a_3 = a_1 \cdot q^2 = 2 \cdot a_1 \Rightarrow q^2 = 2$ oder $q = \sqrt{2} \Rightarrow \langle 1; 1{,}41; 2; 2{,}83; 4; 5{,}66; 8; 11{,}3; 16 \rangle$

1.35 $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots \right\rangle$

1.36 $a_1 = 10$; $a_{10} = 200$; Werte in kΩ

a) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \Rightarrow d = 190/9 \approx 21{,}1$;
$\langle 10; 31{,}1; 52{,}2; 73{,}3; 94{,}4; 115{,}6; 136{,}7; 157{,}8; 178{,}9; 200 \rangle$;
R_1 auf R_2: 211 %; R_9 auf R_{10}: 12 %

b) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{20} \approx 1{,}39$; $\langle 10; 13{,}9; 19{,}5; 27{,}1; 37{,}9; 52{,}8; 73{,}7; 102{,}8; 143{,}4; 200 \rangle$;
R_1 auf R_2: 39%; R_9 auf R_{10}: 39 %

1.37 $a_1 = 50$; $a_6 = 400$; $400 = 50 \cdot q^5 \Rightarrow q = 1{,}516$; $\langle 75{,}8; 114{,}9; 174{,}1; 263{,}9 \rangle$ mm

1.38 Geometrische Folge $\langle I_0, I_1, \ldots, I_{10} \rangle$; I_0 Anfangsintensität, $I_1, I_2, \ldots$ Intensitäten nach dem Durchgang durch die 1., 2. ... Platte; $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
$I_{10} = I_0 \cdot 0{,}95^{10} = 0{,}599 \cdot I_0 \approx 60\%$ von I_0.
$I_n = 0{,}25 \cdot I_0 = I_0 \cdot q^n \Rightarrow q^n = 0{,}25$, $n = 27{,}03$; nach der 27. Platte ist die Restintensität noch knapp über, nach der 28. Platte erstmals unter einem Viertel

1.39 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $\lg a_n = \lg(a_1 \cdot q^{n-1}) = \lg a_1 + (n-1) \cdot q$; $\langle \lg a_n \rangle$ ist eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied $\lg a_1$ und der Differenz q

1.40 $a_1 = 5$; $a_2 = 5^2$; ..., $a_8 = 5^8$; $s_9 = a_1 + \ldots + a_8 = 5 \cdot \frac{5^8 - 1}{5 - 1} = 488280$ Personen erhalten einen Brief

1.41 a) $a_1 = \frac{1}{2}; q = \frac{3}{2}; n = 6 \Rightarrow s_6 = \frac{665}{64} \approx 10{,}39$ b) $a_1 = \frac{3}{2}; q = \frac{3}{2};\ n = 10 \Rightarrow s_{10} = \frac{174075}{1024} \approx 170{,}00$

c) $a_1 = 1; q = -\frac{3}{2};\ n = 11 \Rightarrow s_{11} = \frac{35839}{1024} \approx 35$ d) $a_1 = \sqrt{2}; q = \sqrt{2};\ n = 12 \Rightarrow s \approx 215{,}1$

1.42 a) $a_1 = \frac{1}{4}; q = \frac{1}{4}; n = 8 \Rightarrow s_8 \approx 0{,}333$ b) $a_1 = \frac{2}{5}; q = \frac{2}{5}; n = 12 \Rightarrow s_2 \approx 0{,}667$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^8\right]$; $a_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$; $q = \frac{3}{4}$; $n = 9$; $s_9 = 2{,}081$

d) $3 \cdot 1{,}8^{-2} + 3 \cdot 1{,}8^{-1} + \ldots + 3 \cdot 1{,}8^8 = 3 \cdot 1{,}8^{-2}\,[1 + 1{,}8 + 1{,}8^2 + \ldots + 1{,}8^{10}]$; $s_{11} = 742{,}69$

1.43 $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$, geom. Reihe mit $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$; $s_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$; ca. 154 t

1.44 $\langle p_0, p_1, p_2, \ldots \rangle$ ist eine geometrische Folge, wobei $p_0 = 1013$ mbar der Druck in 0 m Höhe, $p_1 = p_0 \cdot q$ der Druck in 1000 m Höhe, $p_2 = p_0 \cdot q^2$ der Druck in 2000 m Höhe, usw. ist. $q = \frac{p_1}{p_0} = \frac{894}{1013} = 0{,}883$;
$p_2 = p_0 \cdot q^2 = 789$ mbar, $p_3 = p_0 \cdot q^3 = 696$ mbar; $p_4 = p_0 \cdot q^4 = 614$ mbar.

1.45 a) $V_0 = 10$, $V_1 = V_0 \cdot 1{,}03 = 10{,}30$; $V_2 = V_0 \cdot 1{,}03^2 = 10{,}61$; $V_3 = V_0 \cdot 1{,}03^3 = 10{,}93$ (in Mio. t), geometrische Folge mit $q = 1{,}03$. Beachte, dass hier das erste Glied den Index 0 hat!

b) $V_n = V_0 \cdot q^n = 2 \cdot V_0 \Rightarrow q^n = 2$, $n \cdot \ln q = \ln 2$, $n = \frac{\ln 2}{\ln q} = 23{,}4$ Jahre

c) $s = V_0 + V_0 \cdot q + \ldots + V_0 \cdot q^n$ ist eine geom. Reihe mit $a_1 = V_0$, $q = 1{,}03$ und n+1 Summanden;

$s = V_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = M \Rightarrow 1{,}03^{n+1} - 1 = 50 \cdot 0{,}03$ oder $1{,}03^{n+1} = 2{,}5$; daraus: $n+1 = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}03} \approx 31$,

$n \approx 30$. Nach 30 Jahren.

d) Wie oben, aber $M = 5000$; $n \approx 92{,}8$ Jahre

e) $V_1 - V_0 = d = 0{,}3$; jährlicher Verbrauch am Anfang: V_0; nach einem Jahr: $V_0 + d$; nach zwei Jahren: $V_0 + 2d$, ..., nach n Jahren: $V_0 + n \cdot d$; arithmetische Reihe mit n+1 Gliedern.

$s = \frac{n+1}{2} \cdot (V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2} \cdot (2V_0 + n \cdot d) = \frac{n+1}{2} \cdot (20 + n \cdot 0{,}3) = 500$; quadratische Gleichung für n: $n_1 \approx 32{,}6$ ($n_2 = -100{,}3$ sachlich nicht sinnvoll). Nach 32,6 Jahren.

f) Wie c), jedoch mit $q = 1{,}01$: $V_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = M \Rightarrow n = 39{,}7$ Jahre

1.46 Anfänglicher Verbrauch V_0, Verbrauch nach einem Jahr $V_1 = V_0 \cdot q$, ..., Verbrauch nach n Jahren $V_n = V_0 \cdot q^n$.

$q = 1{,}04$: $V_n = V_0 \cdot q^n = 2 \cdot V_0$ oder $q^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} \approx 17{,}7$ Jahre

$q = 1{,}02$: $n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}0$ Jahre. Zeit würde sich etwa verdoppeln.

1.47 Jährlicher Abschreibungsbetrag $A = \frac{3000-0}{4} = 750$; Restwerte: $\langle 3000, 2250, 750, 0 \rangle$ (in €)

1.48 a) $A = \frac{73000-1000}{8} = 9000$;

Restwerte: $\langle 73000, 64000, 55000, 46000, 37000, 28000, 19000, 10000, 1000 \rangle$ (in €)

b) $R_k = R_0 \cdot (1-i)^k$; $i = 1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{R_0}} \Rightarrow i \approx 0{,}415096$;

Restwerte (in €):

$\langle 73000;\ 42698{,}00;\ 24974{,}23;\ 14607{,}53;\ 8544{,}00;\ 4997{,}42;\ 2923{,}01;\ 1709{,}68;\ 1000 \rangle$

1.49 $R_k = R_0 \cdot (1-i)^k$; $i = 1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{R_0}}$; $i = 1 - \sqrt[6]{\frac{2000}{200000}} \Rightarrow i \approx 0{,}5358411$;

Restwerte (in €): $\langle 200000;\ 92831{,}78;\ 43088{,}69;\ 20000;\ 9283{,}18;\ 4308{,}87;\ 2000 \rangle$

1.50 $R_3 = 1191{,}64$; $1 - i = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$; $R_0 = \frac{R_3}{(1-i)^3} = 5000$; Neuwert: € 5000,-

1.51 a) $R_5 = 60000 - 5 \cdot 11000 = 5000$

b) $A_2 = 11000 = i \cdot R_0 \cdot (1-i) = 60000 \cdot i \cdot (1-i)$; $i \cdot (1-i) = 11/60$; quadratische Gleichung für i:
$\Rightarrow$ $i_1 = 0{,}2418$; $i_2 = 1 - i_1 = 0{,}7582$; durch den Abschreibungsbetrag A_2 ist die Abschreibung nicht eindeutig festgelegt!

$R_5 = R_0 \cdot (1-i_1)^5 = 15033{,}74$ bzw. $R_5 = R_0 \cdot (1-i_2)^5 = 49{,}60$

Die beiden möglichen Restwertfolgen lauten:

$\langle 60000;\ 45491{,}93;\ 34491{,}93;\ 26151{,}75;\ 19828{,}22;\ 15033{,}74 \rangle$ bzw.

$\langle 60000;\ 14508{,}07;\ 3508{,}07;\ 848{,}25;\ 205{,}11;\ 49{,}60 \rangle$

1.52 a) $R_0 = R_4 + 4 \cdot 9000 = 37000$ (in €)

b) $R_3 = R_4 + A_4 = 10000$; $i = A_4/R_3 = 0{,}9$; $R_4 = R_0 \cdot (1-i)^4 \Rightarrow R_0 = 10^8$ (in €)

1.53 a) $i = 1-\sqrt[5]{\frac{1000}{10000}} \Rightarrow i \approx 0{,}369043$; $R_k = R_0\cdot(1-i)^k$; $A_k = R_{k-1} - R_k = i\cdot R_{k-1}$

Folge der Restwerte R_k (in €): ⟨6309,57 ; 3981,07 ; 2511,89 ; 1584,89 ; 1000⟩

Folge der Abschreibungsbeträge A_k (in €): ⟨3690,43; 2328,50; 1469,19; 926,99; 584,89⟩

b) $A_1 = i\cdot R_0$; $A_2 = i\cdot R_1 = i\cdot(1-i)\cdot R_0 = (1-i)\cdot A_1$, $A_3 = i\cdot R_2 = i\cdot(1-i)\cdot R_1 = (1-i)\cdot A_2$; usw.

d.h. $A_k = (1-i)\cdot A_{k-1}$ für k =2, 3, 4, ...; $\langle A_k\rangle$ ist eine geometrische Folge mit q = 1- i.

1.54 $5A_5 + 4A_5 + 3A_5 + 2A_5 + A_5 = 15A_5 = 65000 - 5000 \Rightarrow A_5 = 4000$;

$\langle A_n\rangle$ = ⟨20000; 16000; 12000; 8000; 4000⟩

$\langle R_n\rangle$ = ⟨65000; 45000; 29000; 17000; 9000; 5000⟩

1.55 a) € 125778,93 bzw. € 77 217,35
b) € 330659,54 bzw. € 124622,10
c) € 144865,62 bzw. € 67100,81

1.56 a) € 116038,26 bzw. € 90919,01
b) € 264135,74 bzw. € 162156,43
c) € 126718,58 bzw. € 86242,54

1.57 R = 10000; q = 1,06; n = 12
a) vorsch. Rente; E_n = € 178821,38 b) nachsch. Rente; E_n = € 168699,41

1.58 Barwert einer vorschüssigen Rente; $B_n = \frac{E_n}{q^n} = R\cdot\frac{q^n-1}{q^{n-1}\cdot(q-1)}$ = € 261706,42

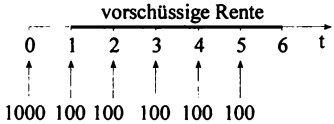
1.59 Barwert einer vorschüssigen Rente; a) € 16215,64 b) € 14493,78 c) € 13518,05

1.60 $1000\cdot 1{,}06 = 1060{,}00$

1.61 Holzbestand nach n Jahren: $100000\cdot q^n - 10000\cdot(q^n-1)/(q-1)$

a) 172918 $m^3 \approx$ 173000 m^3 **b)** 100000 m^3, da Abholzung gleich Zuwachs pro Jahr

1.62 Anfangsguthaben 6 Jahre aufzinsen. Die zusätzlichen Zahlungen können als eine vorschüssige Rente über 5 Jahre gesehen werden:



$1000\cdot q^6 + 100\cdot q\cdot\frac{q^5-1}{q-1}$ = € 1740,89.

Alternativ: Alle Geldbeträge auf den Zeitpunkt t = 6 einzeln aufzinsen und danach addieren.

1.63 i=6%: € 167603,35; i = 6,25%: € 175578,67; prozentueller Unterschied: 4,76%

1.64 € 10603,60 bzw. € 9818,15 bei Aufschub; Unterschied: € 785,45

1.65 a) q = 1,08; $20000 + 800\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^{10}}$ = € 25368,07 ≈ € 25400

b) Barwert der jährlichen Erträge R = Barwert der Investition;

$25368{,}07 = R\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^{10}} \Rightarrow R$ = € 3780,59

1.66

Jahr	Schuld Jahresanfang	Zinsen	Annuität A	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	40000	3200	15000	11800	28200
2	28200	2256	20000	17744	10456
3	10456	836,48	**A_3 = 11292,48**	10456	0

1.67 a) Annuität $A = K_0\cdot q^n\cdot\frac{q-1}{q^n-1}$ = € 9495,86

Jahr	Schuld Jahresanfang	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	40000	2400,00	9495,86	7095,86	32904,14
2	32904,14	1974,25	9495,86	7521,61	25382,54
3	25382,54	1522,95	9495,86	7972,90	17409,63
4	17409,63	1044,58	9495,86	8451,28	8958,35
5	8958,35	537,50	9495,86	8958,35	0,00

b) Annuität A = € 5434,72

Jahr	Schuld Jahresanfang	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	40000	2400,00	5434,72	3034,72	36965,28
2	36965,28	2217,92	5434,72	3216,80	33748,48
3	33748,48	2024,91	5434,72	3409,81	30338,67
4	30338,67	1820,32	5434,72	3614,40	26724,27
5	26724,27	1603,46	5434,72	3831,26	22893,01
6	22893,01	1373,58	5434,72	4061,14	18831,87
7	18831,87	1129,91	5434,72	4304,81	14527,07
8	14527,07	871,62	5434,72	4563,09	9963,97
9	9963,97	597,84	5434,72	4836,88	5127,09
10	5127,09	307,63	5434,72	5127,09	0,00

1.68 Nein, da die Zinsen im ersten Jahr schon € 70,- betragen; Mindestannuität A = € 70,-

1.69 a) Annuität $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$ = € 2755,02 b) A = € 2700

Jahr	Schuld Jahresanfang	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	11000	880	2700	1820	9180
2	9180	734,40	2700	1965,60	7214,40
3	7214,40	577,15	2700	2122,85	5091,55
4	5091,55	407,32	2700	2292,68	2798,88
5	2798,88	223,91	2700	2476,09	322,79

Kreditrest: € 322,79

1.70 Angebot A: $6 + 2 \cdot \frac{1{,}08^7 - 1}{0{,}08} \cdot \frac{1}{1{,}08^7}$ = € 16,41 (in Mio.),

Angebot B: $4 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{0{,}08} \cdot \frac{1}{1{,}08^5}$ = € 17,25 Mio.; B ist günstiger

1.71 Projekt A: $-30000 + 10000 \cdot \frac{1{,}07^6 - 1}{0{,}07} \cdot \frac{1}{1{,}07^6}$ = € 17665,40 ≈ € 17700

Projekt B: $-55000 + 15000 \cdot \frac{1{,}07^6 - 1}{0{,}07} \cdot \frac{1}{1{,}07^6}$ = € 16498,09 ≈ € 16500; Projekt A ist günstiger

1.72 a) Abstand $\left|2 - \frac{2n}{n+1}\right| = \left|\frac{2n+2-2n}{n+1}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < 0{,}01 \Rightarrow n > 199$, also $N = 200$

b) $\frac{2}{n+1} < 0{,}001 \Rightarrow N = 2000$ c) $\frac{2}{n+1} < 0{,}0001 \Rightarrow N = 20000$

1.73 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^2} + 2\right) = 2$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

1.74 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 3\right) = -3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2n^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2} + 2\right) = 2$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+3)^2} = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$

1.75 a) $\langle\sqrt{n}\rangle = \langle 1; 1{,}414; 1{,}732; \ldots\rangle$, streng monoton wachsend, nein (bestimmt divergent)

b) $\langle\sin(n\cdot\pi)\rangle = \langle 0;0;0;\ldots\rangle$, ja, Grenzwert: 0 c) $\langle\cos(n\cdot\pi)\rangle = \langle -1;+1;-1;\ldots\rangle$, nein

d) $\langle\tan(n\cdot\pi)\rangle = \langle 0;0;0;\ldots\rangle$, ja; Grenzwert: 0 e) $\langle\cos^2(n\cdot\pi)\rangle = \langle 1;1;1;\ldots\rangle$, ja, Grenzwert 1

f) $\langle 3+2\cdot(-1)^n\rangle = \langle 1;5;1;5;1;\ldots\rangle$, nein g) $\left\langle\frac{1}{(-2)^n}\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots\right\rangle$, ja, Grenzwert: 0

h) $\langle n \bmod 2\rangle = \langle 1;0;1;0\ldots\rangle$, nein

1.76 a) $\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2-1/n}{1+1/n} \to 2$ b) $\frac{2n-1}{n^2+1} = \frac{2/n-1/n^2}{1+1/n^2} \to \frac{0-0}{1+0} = 0$

c) $\frac{n^3+n^2-1}{n^2+1} = \frac{1+1/n-1/n^3}{1/n+1/n^3} \to \infty$ d) $\frac{-n^4+2n^2+3}{2n^4+1} = \frac{-1+2/n^2+3/n^4}{2+1/n^4} \to -\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{1}{1/\sqrt{n}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$ f) $\frac{\sqrt{n}}{1+n} = \frac{1/\sqrt{n}}{1/n+1} \to \frac{0}{0+1} = 0$

g) $\frac{n}{1+\sqrt{n}} = \frac{1}{1/n+1/\sqrt{n}} \to \infty$ h) $\frac{n}{1+n\sqrt{n}} = \frac{1/\sqrt{n}}{1/n\sqrt{n}+1} \to \frac{0}{0+1} = 0$

1.77 a) $\frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-1/n} \to 1$ b) $\frac{3n^2-2n}{n-1} = \frac{3-2/n}{1/n-1/n^2} \to \infty$ c) $\frac{n^3+n^2-1}{n^2-n} = \frac{1+1/n-1/n^3}{1/n-1/n^2} \to \infty$

d) $\frac{3n^3+n^2+n+1}{2n^3+2n} = \frac{3+1/n+1/n^2+1/n^3}{2+2/n^2} \to \frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{1-1/n}\cdot\frac{1+1/n}{1+2/n} \to \frac{1}{1-0}\cdot\frac{1+0}{1+0} = 1$

f) $\frac{2}{n}+\frac{1}{1-1/n}\cdot\frac{1+1/n}{1+2/n} \to 0+\frac{1}{1-0}\cdot\frac{1+0}{1+0} = 1$

g) $\frac{2/n-1}{1}+\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+2/n} \to -1+\frac{1}{1-0}\cdot\frac{1}{1+0} = -1+1 = 0$

1.78 $b_1 = \frac{\pi}{2}d$; $b_2 = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{2} = b_1$; $b_3 = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{4} = b_1$; .... ; $b_n = n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{n} = b_1$; ... *jedes* Folgeglied b_n ist gleich $b_1 = \frac{\pi}{2}d$, dieser Wert und nicht d ist somit der Grenzwert der Folge $\langle b_n\rangle$!

1.79 Bei jedem n-ten Schritt werden die Dreiecksseiten gedrittelt, während sich ihre Anzahl viervierfacht; n = 0 bezieht sich auf das Ausgangsdreieck, n = 1 auf die aus dem Ausgangsdreieck entstandene erste Figur, einen sechszackigen Stern, usw.

$U_0 = 3a\cdot = 3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^0$; $U_1 = 3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^1$; ....; $U_n = 3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$; ... $\langle U_n\rangle$ ist eine geometrische Folge mit dem Grenzwert ∞.

$$A_0 = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};\quad A_1 = A_0+3\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = A_0+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = A_0\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right),$$

$$A_2 = A_1+3\cdot4\cdot\left(\frac{a}{9}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = A_1+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = A_0\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{3\cdot4}{9^2}\right) = A_0\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\right), \ldots,$$

$$A_n = A_0\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\ldots+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}_{\text{geom. Reihe}}\right)$$; enthaltene geometr. Reihe: $a = \frac{1}{3}$, $q = \frac{4}{9}$.

$A_n = A_0\cdot\left(1+\frac{a}{1-q}\right) \to A_0\cdot\left(1+\frac{1/3}{1-4/9}\right) = \frac{8}{5}\cdot A_0$. Die Schneeflockenkurve besitzt also bei einem endlichen Flächeninhalt einen unendlichen Umfang!

1.80 a) $s=\frac{2}{1-0{,}1}=\frac{20}{9}$ b) $s=\frac{2}{1-(-0{,}1)}=\frac{20}{11}$ c) $s=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$ d) $s=\frac{-1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$

1.81 a) $a=3;\ q=\frac{1}{2};\ s=6$ b) $a=\frac{3}{4};\ q=\frac{3}{4};\ s=3$ c) $a=1;q=0{,}1;\ s=\frac{10}{9}$

d) $a=1;q=-0{,}1;\ s=\frac{10}{11}$ e) $a=1;q=-\frac{1}{2};\ s=\frac{2}{3}$ f) $a=\frac{2}{3};\ q=-\frac{1}{2};\ s=\frac{4}{9}$

g) $a=2;q=-\frac{1}{2};\ s=\frac{4}{3}$ h) $a=10;q=0{,}1;\ s=\frac{100}{9}$ i) $a=4;q=\frac{1}{\sqrt{2}};\ s=4\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$

1.82 a) $a=1;\ q=\frac{1}{3};\ s=\frac{3}{2}$ b) $a=\frac{1}{3};q=\frac{1}{3};\ s=\frac{1}{2}$ c) $a=\frac{1}{9};\ q=\frac{1}{3};\ s=\frac{1}{6}$

d) $a=1;\ q=\frac{3}{5};\ s=\frac{5}{2}$ e) $a=-\frac{1}{3};\ q=-\frac{1}{3};\ s=-\frac{1}{4}$ f) $a=3\cdot 0{,}9;\ q=0{,}9;\ s=27$

g) $a=3\cdot 0{,}9^5;\ q=0{,}9;\ s\approx 17{,}71$ h) $a=0{,}5\cdot 0{,}8^{-2};\ q=0{,}8;\ s\approx 3{,}91$

1.83 a) $0{,}\dot{2}=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\ldots;\ a=\frac{2}{10};\ q=\frac{1}{10};\ 0{,}\dot{2}=\frac{0{,}2}{1-0{,}1}=\frac{2}{9}$

b) $0{,}\dot{9}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots;\ a=\frac{9}{10};q=\frac{1}{10};\ 0{,}\dot{9}=1$

c) $0{,}3\dot{2}=0{,}3+0{,}0\dot{2};\ 0{,}0\dot{2}=\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots;\ a=\frac{2}{100};q=\frac{1}{10};\ 0{,}0\dot{2}=\frac{2}{90};\ 0{,}3\dot{2}=0{,}3+\frac{2}{90}=\frac{29}{90}$

d) $2{,}\dot{5}=2+0{,}\dot{5};\ 0{,}\dot{5}=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\ldots;\ a=\frac{5}{10};\ q=\frac{1}{10};\ 0{,}\dot{5}=\frac{5}{9};\ 2{,}\dot{5}=2+\frac{5}{9}=\frac{23}{9}$

e) $0{,}\overline{23}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\ldots;\ a=\frac{23}{100};\ q=\frac{1}{100};\ 0{,}\overline{23}=\frac{23}{99}$

f) $1{,}\overline{04}=1+0{,}\overline{04};\ 0{,}\overline{04}=\frac{4}{100}+\frac{4}{10000}+\ldots;a=\frac{4}{100};\ q=\frac{1}{100};\ 0{,}\overline{04}=\frac{4}{99};\ 1{,}\overline{04}=1+\frac{4}{99}=\frac{103}{99}$

g) $3{,}\overline{10}=3+0{,}\overline{10};\ 0{,}\overline{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{1000}+\ldots;\ a=\frac{1}{10};\ q=\frac{1}{100};\ 0{,}\overline{10}=\frac{10}{99};\ 3{,}\overline{10}=3+\frac{10}{99}=\frac{307}{99}$

h) $0{,}\overline{02}=\frac{2}{100}+\frac{2}{10000}+\ldots;\ a=\frac{2}{100};q=\frac{1}{100};\ 0{,}\overline{02}=\frac{2}{99}$

i) $1{,}\overline{234}=1+0{,}\overline{234};\ 0{,}\overline{234}=\frac{234}{10^2}+\frac{234}{10^6}+\ldots;\ a=\frac{234}{10^2};\ q=\frac{1}{10^2};\ 0{,}\overline{234}=\frac{234}{999};1{,}\overline{234}=1+\frac{234}{999}=\frac{137}{111}$

j) $0{,}1\overline{23}=0{,}1+0{,}0\overline{23};\ 0{,}0\overline{23}=\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\ldots;a=\frac{23}{10^3};q=\frac{1}{100};\ 0{,}0\overline{23}=\frac{23}{990};\ 0{,}1\overline{23}=0{,}1+\frac{23}{990}=\frac{61}{495}$

1.84 $\frac{a}{1-q}=\frac{4}{3}$ und $a\cdot q=\frac{1}{3}$; daraus $a=\frac{1}{3q}$ in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt: $q^2-q-\frac{1}{4}=0$;

$q_{1,2}=\frac{1}{2}$; $a=\frac{1}{3q}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\ldots$

1.85 $\frac{a}{1-q}=27\Rightarrow a=27\cdot(1-q)$;

$a+a\cdot q+a\cdot q^2=a\cdot(1+q+q^2)=27\cdot(1-q)\cdot(1+q+q^2)=27\cdot(q^3-1)=27\cdot q^3-27=26$; daraus

$q^3=\frac{1}{27}$ und weiters $q=\frac{1}{3}$; $a=27\cdot(1-q)=18$; $18+6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$

1.86 a) $100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100},\ldots$ (in m); geom. Reihe: $a=100$ m, $q=\frac{1}{10}$ b) $\frac{a}{1-q}=111{,}\dot{1}$ m

1.87 a) $A_1=1^2-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9};\ A_2=A_1-8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2=1-\frac{1}{9}-\frac{8}{9^2};\ \ldots$

$$A_n=1-\frac{1}{9}-\frac{8}{9^2}-\frac{8^2}{9^3}-\ldots-\frac{8^{n-1}}{9^n}=1-\frac{1}{9}\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\right);\ \ldots$$

$1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}+\ldots$ ist eine unendliche geometrische Reihe mit $a=1$ und $q=\frac{8}{9}$;

ihre Summe ist $\frac{1}{1-8/9} = 9$. Daher $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1 - \frac{1}{9}\cdot 9 = 0$.

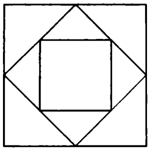
b) $U_1 = 4 + \frac{4}{3}$; $U_2 = U_1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{8}{3}$; $U_3 = U_2 + \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2$; ...; $U_n = 4 + \frac{4}{3}\cdot\left[1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]$;

da $\left[1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]$ über alle Grenzen wächst, gilt dies auch für die Umfänge U_n:

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$.

Der SIERPIENSKI-Teppich ist eine Fläche mit dem Inhalt 0, aber mit unendlich großem Umfang!

1.88 Seiten: a; $a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; ...

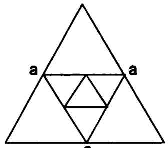


a) Umfänge: $4a$; $4a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2a$; ... unendliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied 4a und $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; Summe:

$\frac{4a}{1-1/\sqrt{2}} = 4\cdot a\cdot(2+\sqrt{2})$

b) Flächeninhalte: a^2; $a^2\cdot\frac{1}{2}$; $.a^2\cdot\frac{1}{4}$; ... unendliche geometrische Folge mit Anfangsglied a^2 und $q = \frac{1}{2}$; Summe: $\frac{a^2}{1-1/2} = 2\cdot a^2$

1.89 Seiten: a; $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{4}$; ...



a) Umfänge: $3a$; $\frac{3a}{2}$; $\frac{3a}{4}$; ... unendliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied 3a und $q = \frac{1}{2}$; Summe: $\frac{3a}{1-1/2} = 6a$

b) Flächeninhalte: $\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$; $\frac{a^2}{16}\cdot\sqrt{3}$; $\frac{a^2}{48}\cdot\sqrt{3}$; ... unendliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied $\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$ und $q = \frac{1}{4}$; Summe: $\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{1-1/4} = \frac{a^2}{3}\cdot\sqrt{3}$

1.90 Radien: r; $\cdot r\cdot\frac{1}{2}$; $r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$; ...

Halbkreisbogenlängen: $\pi\cdot r$; $\pi\cdot r\cdot\frac{1}{2}$; $\pi\cdot r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$; ... ; geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\pi\cdot r$ und $q = \frac{1}{2}$; Summe: $L = \frac{\pi\cdot r}{1-1/2} = 2\pi\cdot r$

1.91 Höhen (in m): 2; $2\cdot 0{,}8$; $2\cdot 0{,}8^2$; ...

Gesamtweg: $2 + 2\cdot 2\cdot 0{,}8 + 2\cdot 2\cdot 0{,}8^2 + \ldots = 2 + 4\cdot 0{,}8\cdot[1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots] = 2 + 3{,}2\cdot\frac{1}{1-0{,}8} = 18$ m

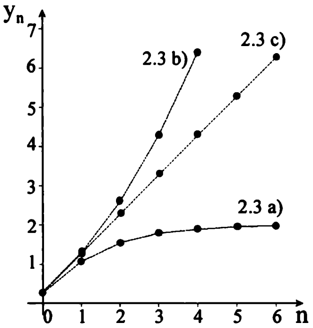
2 Diskrete Systeme

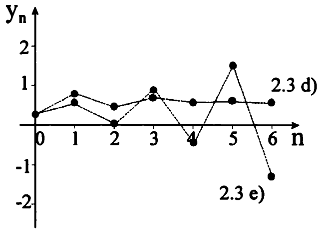
2.1 Zinsen am Jahresende: $500 \cdot 0{,}04 = 20$; bei einer Abhebung von € 20,- bleibt der Kontostand gleich.
Differenzengleichung: $y_n = 1{,}04 \cdot y_{n-1} - 20$ mit $y_0 = 500$

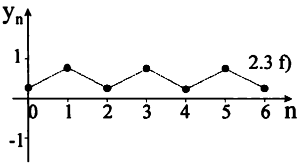
2.2 $y_n = 1{,}06 \cdot y_{n-1} - 2000$; $y_0 = 10000$

2.3

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
a)	1,13	1,56	1,78	1,89	1,95	1,97
b)	1,31	2,64	4,30	6,38	8,97	21,21
c)	1,25	2,25	3,25	4,25	5,25	6,25
d)	0,875	0,563	0,719	0,641	0,680	0,660
e)	0,625	0,063	0,906	-0,359	1,539	-1,309
f)	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25

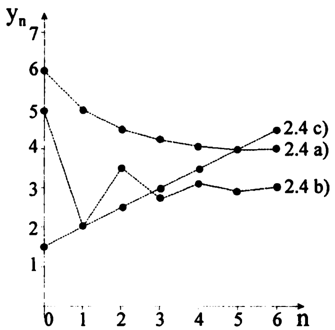


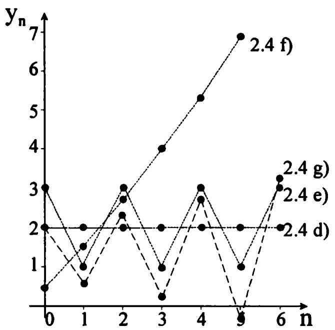




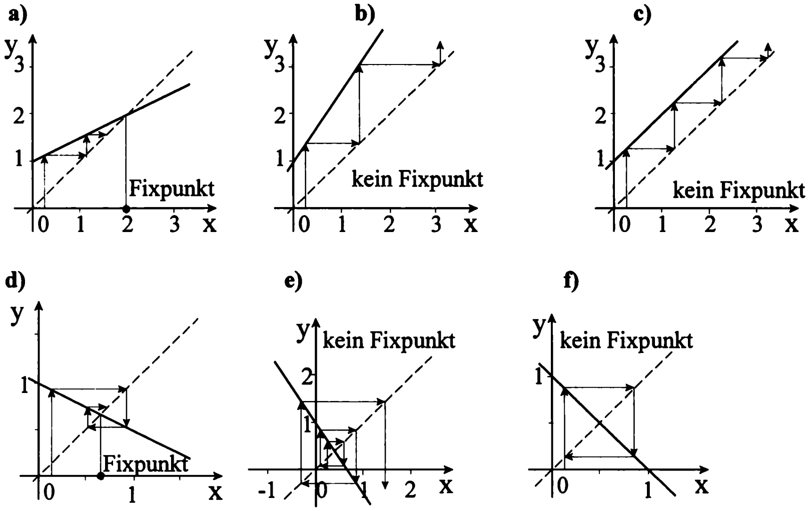
2.4

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
a)	5	4,5	4,25	4,13	4,06	4,03
b)	2	3,5	2,75	3,13	2,94	3,03
c)	2	2,5	3	3,5	4	4,5
d)	2	2	2	2	2	2
e)	1	3	1	3	1	3
f)	1,55	2,71	3,98	5,37	6,91	8,60
g)	0,6	2,28	0,26	2,68	-0,22	3,26

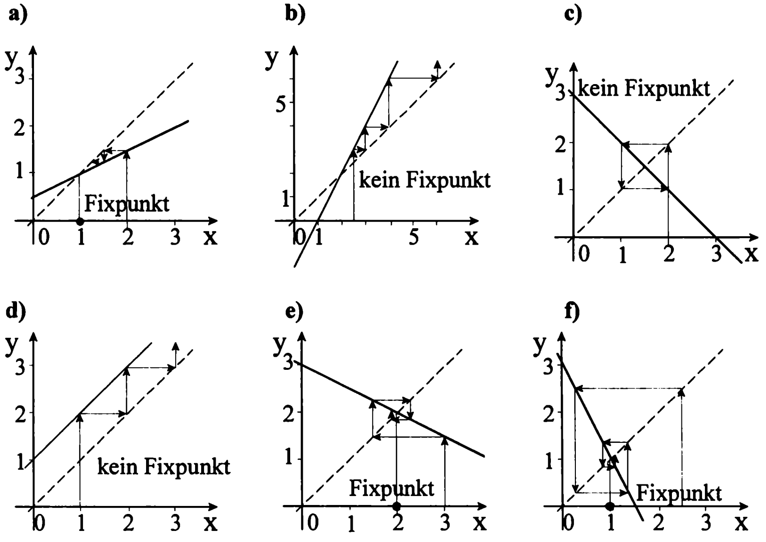




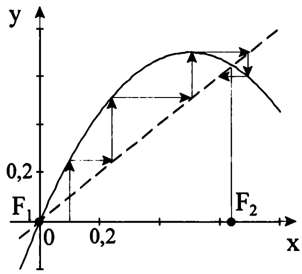
2.5



2.6



2.7



$y_1 = 0{,}252$; $y_2 = 0{,}528$; $y_3 = 0{,}698$;
$y_4 = 0{,}590$; $y_5 = 0{,}677$; $y_6 = 0{,}612$

Fixpunkte: $x = 2{,}8 \cdot x \cdot (1-x)$
Lösung dieser quadratischen Gleichung mit Hilfe des Produkt-Null-Satzes:
$x \cdot [1 - 2{,}8 \cdot (1-x)] = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}643$.
Damit liegen zwei Fixpunkte vor.

2.8 Lösung von $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ beim Anfangswert y_0:

$$y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}, \text{ wenn } a \neq 1; \quad y_n = y_0 + b \cdot n, \text{ wenn } a = 1.$$

a) $\frac{b}{1-a} = 2;\ y_0 - \frac{b}{1-a} = -\frac{7}{4};\ y_n = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$ b) $y_n = \frac{17}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n - 4$ c) $y_n = \frac{1}{4} + n$

d) $y_n = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$ e) $y_n = -\frac{3}{20} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$ f) $y_n = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2}$

2.9 Lösung von $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ beim Anfangswert y_0 wie in Aufgabe 2.8:

a) $y_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$ b) $y_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$ c) $y_n = -\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 2$

d) $y_n = 1$ e) $y_n = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1$ f) $y_n = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot n$ g) $y_n = 2$

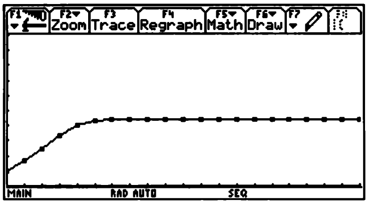
h) $y_n = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{5}{2}$ i) $y_n = 10{,}5 \cdot 1{,}1^n - 10$ j) $y_n = 0{,}5 \cdot (-1{,}2)^n + 3$

2.10

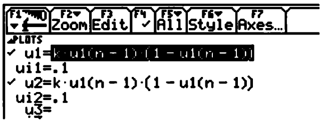
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0,100	0,180	0,295	0,416	0,486	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,101	0,182	0,297	0,418	0,486	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500

Keine empfindliche Abhängigkeit!

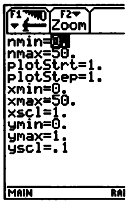
2.11 a)



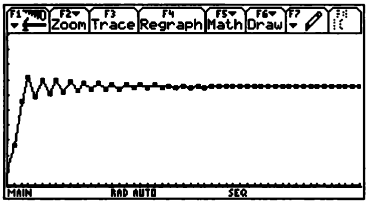
monoton wachsend



Der Graph wurde zweimal gezeichnet (F6 Style): einmal mit *Square*, das andere Mal mit *Line*

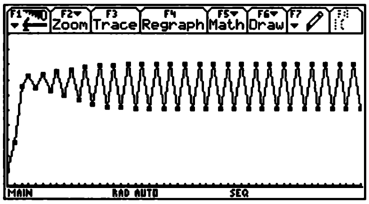


b)



konvergent (oszillierend auf einen Grenzwert)

c)



divergent (oszillierend zwischen zwei Werten)

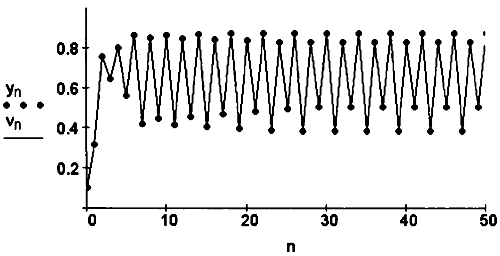
d) Mathcad:

$k := 3.5 \quad n := 0, 1 .. 50$

$y_n := \begin{cases} 0.1 & \text{if } n = 0 \\ [k \cdot y_{n-1} \cdot (1 - y_{n-1})] & \text{otherwise} \end{cases}$

$v_n := y_n$

Die Folge $\langle v_n \rangle$ wird als Streckenzug (*Linie*) gezeichnet.

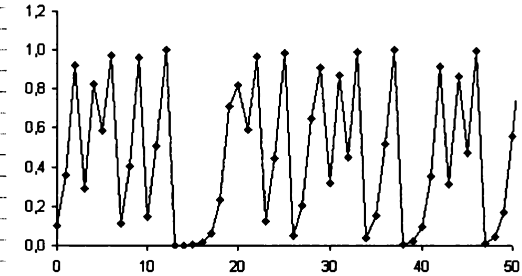


Divergente Folge (schließlich zwischen vier Werten oszillierend)

e) Excel:

B4 =\$B\$1*B3*(1-B3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k =	4						
2	n	y_n						
3	0	0,100						
4	1	0,360						
5	2	0,922						
6	3	0,289						
7	4	0,822						
8	5	0,585						
9	6	0,971						
10	7	0,113						
11	8	0,402						
12	9	0,962						
13	10	0,148						
14	11	0,504						
15	12	1,000						



Divergent; die Folgeglieder springen anscheinend willkürlich zwischen 0 und 1 hin und her, das Verhalten ist "chaotisch" geworden

2.12 a)

B4 =\$C\$1*COS(B3)

	A	B	C
1	n	k =	1
2		y_n	y_n
3	0	**0,5000**	**0,5010**
4	1	0,8776	0,8771
5	2	0,6390	0,6394
6	3	0,8027	0,8025
7	4	0,6948	0,6949
8	5	0,7682	0,7681
9	6	0,7192	0,7192
10	7	0,7524	0,7523
11	8	0,7301	0,7301
38	35	0,7391	0,7391
39	36	0,7391	0,7391
40	37	0,7391	0,7391
41	38	0,7391	0,7391
42	39	0,7391	0,7391
43	40	0,7391	0,7391

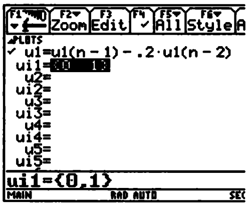
e)

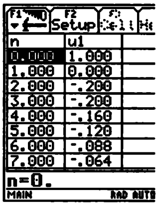
C4 =\$C\$1*COS(C3)

	A	B	C
1	n	k =	5
2		y_n	y_n
3	0	**0,5000**	**0,5010**
4	1	4,3879	4,3855
5	2	-1,5941	-1,6054
6	3	-0,1163	-0,1731
7	4	4,9662	4,9253
8	5	1,2555	1,0563
9	6	1,5503	2,4604
10	7	0,1026	-3,8840
11	8	4,9737	-3,6843
38	35	1,7066	-4,3184
39	36	-0,8770	-1,9193
40	37	3,8971	-1,7073
41	38	-3,6395	-0,6803
42	39	-4,3929	3,8868
43	40	-1,5703	-3,6746

Für k = 1 oder 2 besteht nur eine geringe Abhängigkeit der Folgeglieder vom Anfangswert y_0; sie ist stark für k = 5 ("chaotisch").

2.13 a)





b)

B4 =B3-0,9*B2

	A	B	C
1	n	y_n	
2	0	1	
3	1	0	
4	2	-0,9	
5	3	-0,9	
6	4	-0,09	
7	5	0,72	
8	6	0,801	

2.14 Mathcad:

$n := 2, 3 .. 6$

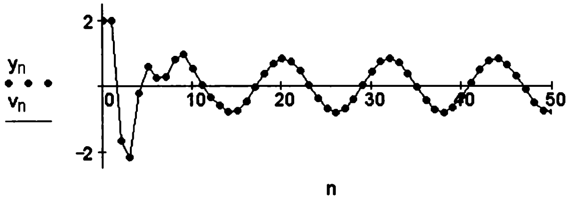
$y_0 := 1 \quad y_1 := 1$

$y_n := 1 - 0.7 \cdot y_{n-2}$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.79 \\ 0.79 \\ 0.447 \end{pmatrix}$$

2.15 Mathcad $n := 0, 1 .. 50$ $\quad y_n := \begin{vmatrix} 2 \text{ if } n = 0 \\ 2 \text{ if } n = 1 \\ (0.1 \cdot y_{n-1} - 0.5 \cdot y_{n-2} + \sin(100 \cdot n)) \text{ otherwise} \end{vmatrix}$

$v_n := y_n$



2.16 Differenzengleichung: $y_n = 1{,}03 \cdot y_{n-1}$, $y_0 = 50000$; $n = 1, 2, 3, ...$

Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = 1{,}03$ und $b = 0 \Rightarrow y_n = 50000 \cdot 1{,}03^n$

2.17 y_n Kontostand am Ende des n-ten Jahres; $y_n = 1{,}04 \cdot y_{n-1} - 20$, $y_0 = 500$; $n = 1, 2, 3, ...$

Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = 1{,}04$ und $b = -20 \Rightarrow y_n = 500$; die Abhebung von € 20,- schluckt genau die Zinsen

2.18 y_n Kontostand am Ende des n-ten Jahres;

$y_n = (y_{n-1} + R) \cdot q = y_{n-1} \cdot q + R \cdot q$; $y_0 = 0$, wobei $q = 1 + i$ und $n = 1, 2, 3, ...$

Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = q$, $b = R \cdot q \Rightarrow$

$$y_n = \left(0 - \frac{R}{1-q}\right) \cdot q^n + \frac{R}{1-q} = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{1-q} = 2100 \cdot 1{,}05^n - 2100$$

2.19 a) y_n Restschuld am Ende des n-ten Jahres; $y_n = 1{,}06 \cdot y_{n-1} - A$, $y_0 = K_0 = 100000$

b) Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = 1{,}06$, $b = -A \Rightarrow$

$y_n = \left(K_0 - \frac{A}{q-1}\right) \cdot q^n + \frac{A}{q-1} = 0$; nach $n = 10$ Jahren soll $y_n = 0$ sein; daraus

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 100000 \cdot 1{,}06^{10} \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1} = 13586{,}80$$

2.20 a) $y_1 = 1{,}08 \cdot 100000 - 20000 = 88000$; $y_2 = 1{,}08 \cdot 88000 - 20000 = 75040$; $y_3 = 61043{,}2$

b) $y_n = 1{,}08 \cdot y_{n-1} - 20000$, $y_0 = 100000$, $n = 1, 2, 3, ...$; y_1, y_2 und y_3 wie in a)

c) Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$, $y_0 = 100000$, mit $a = 1{,}08$, $b = -20000 \Rightarrow$

$y_n = 50000 \cdot (5 - 3 \cdot 1{,}08^n)$; $y_n = 50000 \cdot (5 - 3 \cdot 1{,}08^n) \geq 0$ oder $3 \cdot 1{,}08^n \leq 5$

nach Logarithmieren erhält man $n \leq 6{,}64$; damit 6 volle Rückzahlungen

d) Restschuld (Ende des 6.Jahres). $y_6 = 50000 \cdot (5 - 3 \cdot 1{,}08^6) = 11968{,}85$

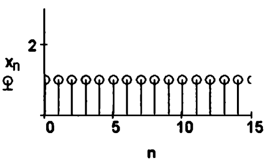
2.21 a) $y_n = 0{,}5 \cdot y_{n-1} + 1$, $y_0 = 1$, wobei $n = 1, 2, 3, ...$.

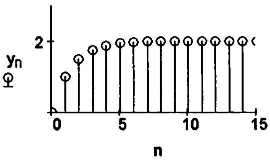
Lösung: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = 2 \cdot (1 - 0{,}5^n)$.

Mathcad:

$n := 0, 1 .. 15$ $\quad x_n := 1$

$y_n := \begin{vmatrix} 0 \text{ if } n = 0 \\ (0.5 \cdot y_{n-1} + x_n) \text{ otherwise} \end{vmatrix}$





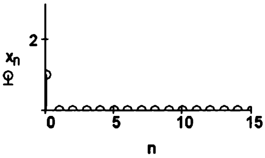
b) y_0 0; $y_1 = 0{,}5 \cdot y_0 + 1$, $y_1 = 1$; $n \geq 2$: $y_n = 0{,}5 \cdot y_{n-1}$ mit $y_1 = 1$ ... Lösung: $y_n = 0{,}5^{n-1}$.

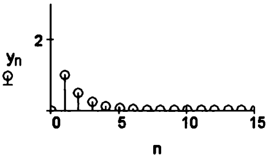
Mathcad:

$n := 0, 1 .. 15$

$x_n := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$y_n := \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ (0.5 \cdot y_{n-1} + x_{n-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$

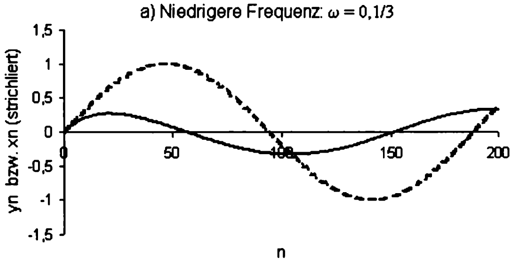


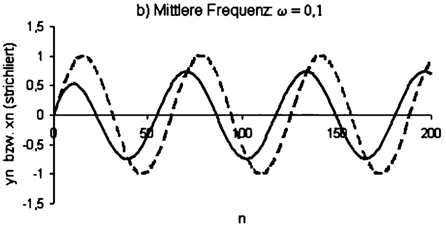


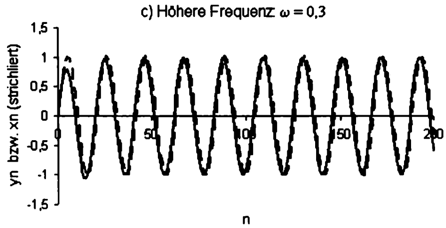
2.22

C5 ▾ fx =0,9048*C4+B5-B4

	A	B	C	D
1	ω =	0,0333333		
2	n	x_n	y_n	
3	0	0	0	
4	1	0,0333	0,0333	
5	2	0,0666	0,0634	
6	3	0,0998	0,0906	
7	4	0,1329	0,1151	
8	5	0,1659	0,1371	
9	6	[illegible]	[illegible]	







2.23 ⟨0,5; 1; -6; 0,5; 1, -6; ... ⟩, periodische Folge

2.24 $\left\langle 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 0, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{32}, \ldots \right\rangle$

2.25 Der genaue Wert des gesuchten Flächeninhaltes (eines Trapezes) ist 2,5.

x_{n-1} ist Funktionswert an der Stelle $t = (n-1) \cdot \Delta t$; $x_{n-1} = (n-1)\,\Delta t + 2$; analog: $x_n = n\,\Delta t + 2$;

a) $\Delta t = 0{,}2$: $y_n = y_{n-1} + 0{,}2 \cdot [(n-1)\,0{,}2 + 2] = y_{n-1} + \cdot 0{,}04 \cdot n + 0{,}36$, $y_0 = 0$;

$5 \cdot 0{,}2 = 1 \Rightarrow y_5$ ist der gesuchte Flächeninhaltswert;

$y_1 = 0{,}40$; $y_2 = 0{,}84$; $y_3 = 1{,}32$; $.y_4 = 1{,}84$; $y_5 = \mathbf{2{,}40}$

$\Delta t = 0{,}1$; $y_n = y_{n-1} + 0{,}1 \cdot [(n-1)\,0{,}1 + 2] = y_{n-1} + 0{,}01 \cdot n + 0{,}19$, $y_0 = 0$;

$10 \cdot 0{,}1 = 1 \Rightarrow y_{10}$ ist der gesuchte Flächeninhaltswert;

$y_1 = 0{,}20$; $y_2 = 0{,}41$; $y_3 = 0{,}63$; $y_4 = 0{,}86$; ... , $y_8 = 1{,}88$; $y_9 = 2{,}16$; $y_{10} = \mathbf{2{,}45}$

b) $\Delta t = 0{,}2$: $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot [(n-1)\,0{,}2 + 2 + n\,0{,}2 + 2] = y_{n-1} + 0{,}04 \cdot n + 0{,}38$; $y_0 = 0$;

$5 \cdot 0{,}2 = 1 \Rightarrow y_5$ ist der gesuchte Flächeninhaltswert;

$y_1 = 0{,}42$; $y_2 = 0{,}88$; $y_3 = 1{,}38$; $.y_4 = 1{,}92$; $y_5 = \mathbf{2{,}5}$

$\Delta t = 0{,}1$; $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot [(n-1)\,0{,}1 + 2 + n\,0{,}1 + 2] = y_{n-1} + 0{,}01 \cdot n + 0{,}195$; $y_0 = 0$;

$10 \cdot 0{,}1 = 1 \Rightarrow y_5$ ist der gesuchte Flächeninhaltswert;

$y_1 = 0{,}205$; $y_2 = 0{,}42$; $y_3 = 0{,}645$; $y_4 = 0{,}88$; ..., $y_8 = 1{,}92$; $y_9 = 2{,}205$; $y_{10} = \mathbf{2{,}5}$

2.26 Salzmassen y_n in g: a) $y_1 = 2$; $y_2 = 3$; $y_3 = 3{,}5$

b) Ausgangssituation: 1 Liter reines Wasser, $y_0 = 0$

In jedem Zeitschritt werden zur vorhandenen Salzlösung von einem Liter noch 4 g Salz hinzugefügt, 1 Liter reines Wasser beigemischt und dann die Hälfte der neuen Lösung abgegossen; y_n ist der in der Restlösung verbliebene Salzgehalt:

$y_n = ½\,(y_{n-1} + 4) = ½\cdot y_{n-1} + 2$; $y_0 = 0$

c) Lösung: $y_n = 4\cdot[1 - (½)^n] \rightarrow 4$, d.h. der Salzgehalt konvergiert gegen 4 g

2.27 Von allen auftretenden physikalischen Größen sind nur die Zahlenwerte inden zugehörigen SI-Einheiten angegeben.

$u_n = (1\text{-}k)\cdot u_{n-1} + k\cdot U$, $u_0 = 0$; $k = \Delta t/(RC) = \Delta t/1 = \Delta t$; $U = 100$

$\Delta t = 0{,}1$: $u_n = 0{,}9\cdot u_{n-1} + 10$, $u_0 = 0$;

Lösung: $y_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = 0{,}9$ und $b = 10 \Rightarrow u_n = 100\cdot(1 - 0{,}9^n)$;

$t = n\cdot\Delta t = RC = 1$ bedeutet $n = 10$: $u_{10} = 65{,}13$

$\Delta t = 0{,}001$: $u_n = 0{,}999\cdot u_{n-1} + 0{,}1$, $u_0 = 0$;

Lösung: $y_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ mit $a = 0{,}999$ und $b = 0{,}1 \Rightarrow$

$u_n = 100\cdot(1 - 0{,}999^n)$; $t = n\cdot\Delta t = RC = 1$ bedeutet $n = 1000$: $u_{1000} = 63{,}23$.

Zeitkontinuierliche Lösung (siehe „Ing. Mathematik 4", Seite 145, dort U = 5 V und RC = 0,5):

$u(t) = U\cdot(1\text{-}e^{-t/RC})$; damit. $u(1) = 100\cdot(1\text{-}e^{-1/1}) = 63{,}21$.

2.28 Von den auftretenden physikalischen Größen sind nur die Zahlenwerte in den zugehörigen SI-Einheiten angegeben.

$v_n = v_{n-1} + g\cdot\Delta t = v_{n-1} + 0{,}1\cdot g$, $v_0 = 0$;

Lösung von $y_n = a\cdot y_{n-1} + b$, wenn $a = 1$: $y_n = y_0 + b\cdot n$; somit: $v_n = 0 + 0{,}1\cdot g\cdot n$;

mit $n\cdot\Delta t = 0{,}1\cdot n = 4$ folgt $n = 40$; $v_{40} = 0{,}1\cdot g\cdot 40 = 4\cdot g$. Dieser Wert ist unabhängig von der Größe der Zeitschritte Δt. Dies stimmt mit der genauen Formel $v = g\cdot t$ überein!

2.29 Von den auftretenden physikalischen Größen sind nur die Zahlenwerte in den zugehörigen SI-Einheiten angegeben.

$v_n = v_{n-1} + (g - k/m\cdot v_{n-1}^2)\cdot\Delta t =$

$= v_{n-1} + (10 - 5/9\cdot v_{n-1}^2)\cdot\Delta t$, $v_0 = 0$; nichtlineare Differenzengleichung.

$\Delta t = 0{,}01$: $n\cdot\Delta t = 0{,}5 \Rightarrow n = 50$;

$v_n = v_{n-1} + (10 - 5/9\cdot v_{n-1}^2)\cdot 0{,}01$, $v_0 = 0$;

$v_{50} = 3{,}5269 \approx 3{,}53$ (in m/s)

$\Delta t = 0{,}001$: $n\cdot\Delta t = 0{,}5 \Rightarrow n = 500$;

$v_n = v_{n-1} + (10 - 5/9\cdot v_{n-1}^2)\cdot 0{,}001$, $v_0 = 0$;

$v_{500} = 3{,}5104 \approx 3{,}51$ (in m/s)

B4 ▾ fx =B3+(10-5/9*B3^2)*B1

	A	B	C	D
1	Δt =	0,01	0,001	
2	n	v_n	v_n	
3	0	0	0	
4	1	0,1000	0,0100	
5	2	0,1999	0,0200	
6	3	0,2997	0,0300	
7	4	0,3992	0,0400	
51	48	3,4613	0,4780	
52	49	3,4948	0,4879	
53	50	**3,5269**	0,4978	
501	498		3,5041	
502	499		3,5072	
503	500		**3,5104**	

Zeitkontinuierliche Lösung (siehe „Ing. Mathematik 4", Aufgabe 4.17, Seite 137):

$v(t) = v_S\cdot\tanh\frac{g\cdot t}{v_S}$ mit $v_S = \sqrt{\frac{m\cdot g}{k}}$.

3 Grenzwert einer Funktion - Stetigkeit

3.1 a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=2\cdot\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1=2\cdot 2+1=5$ b) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=\lim\limits_{x\to 3}x\cdot\lim\limits_{x\to 3}x=3\cdot 3=9$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2-4x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(2-4x)}{\lim\limits_{x\to -1}x}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}2-4\cdot\lim\limits_{x\to -1}x}{-1}=\frac{2-4\cdot(-1)}{-1}=-6$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}-\lim\limits_{x\to 0}1=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x-1=0-1=-1$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{2}-\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 3}x-\frac{2}{\lim\limits_{x\to 3}x}=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-4x^2}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-4x^2)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}=\frac{1-4\cdot 0}{0+1}=1$ g) $\lim\limits_{x\to -2}\left(1-x^3\right)=\lim\limits_{x\to -2}1-\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^3=1-(-2)^3=27$

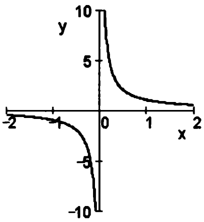
h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(-x+x^2-\frac{2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}(-x)+\lim\limits_{x\to 1}x^2-\frac{\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-1+1^2-\frac{2}{1+1}=-1$

3.2 a) Definitionslücke: $x_0 = 0$ (Nenner ist null); $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$; $x_0 = 0$ ist daher Polstelle

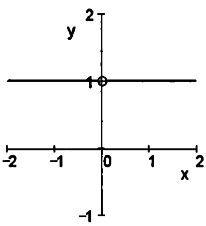
b) Definitionslücke: $x_0 = 0$ (Nenner ist null); $x \neq 0$: $\frac{x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$; Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 0$

c) Definitionslücke: $x_0 = 2$ (Nenner ist null); $x \neq 2$: $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2\cdot(x+2)}{x-2}=x+2$,
$\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$; Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 2$

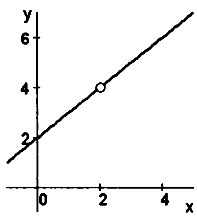
d) Definitionslücke: $x_0 = 1$ (Nenner ist null); $x \neq 1$: $\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)}{x-1}=x^2$,
$\lim\limits_{x\to 1}x^2=1\cdot 1=1$; Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 1$



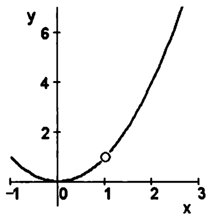
zu a)



zu b)



zu c)



zu d)

e) Definitionslücke: $x_0 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x-1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x-1}{x}=-\infty$; $x_0 = 0$ ist Polstelle

f) Definitionslücke: $x_0 = 1$;
$(x^2 + 2x - 3) : (x-1) = x + 3$
$\underline{-x^2 \mp x}$
$3x - 3$
$\underline{-3x \mp 3}$
$0 \quad 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=1+3=4$;
Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 1$

g) Definitionslücke: $x_0 = 3$;
$(x^3 - x^2 - 6x) : (x - 3) = x^2 + 2x$
$\underline{-x^3 \mp 3x^2}$
$2x^2 - 6x$
$\underline{-2x^2 \mp 6x}$
$0 \quad 0$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x)=3\cdot 3+2\cdot 3=15$;
Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 3$

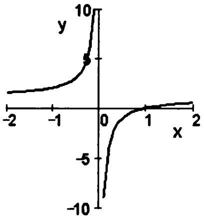
h) Definitionslücke: $x_0 = 1$;

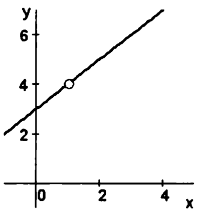
$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 + 2x) : (x - 1) = x^2 + 2 \\ \underline{-x^3 \mp x^2} \\ \qquad +2x \\ \qquad \underline{-2x - 2} \\ \qquad\ \ 0 \quad 2 \end{array}$$

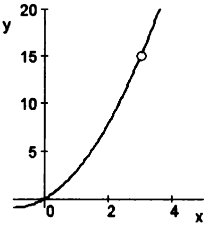
$$\frac{x^3 - x^2 + 2x}{x-1} = x^2 + 2 + \frac{2}{x-1};$$

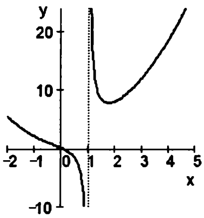
$$\lim_{x\to 1-}\left(x^2 + 2 + \frac{2}{x-1}\right) = -\infty; \ \lim_{x\to 1+}\left(x^2 + 2 + \frac{2}{x-1}\right) = +\infty$$

$x_0 = 1$ ist Polstelle


zu e)


zu f)


zu g)


zu h)

i) Definitionslücke: $x_0 = 0$; $x \neq 0$: $\frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{x\cdot(x-2)}{x} = x - 2$, $\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = 0 - 2 = -2$;

Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 0$

j) Definitionslücke: $x_0 = 0$; $x \neq 0$: $\frac{(2+x)^2 - 4}{x} = \frac{x\cdot(x+4)}{x} = x + 4$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+4) = 0 + 4 = 4$;

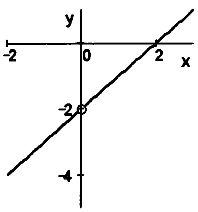
Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x_0 = 0$

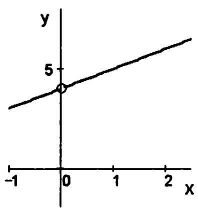
k) Definitionslücke: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1$; $x \neq 1$: $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 1$ (Polynomdivision),

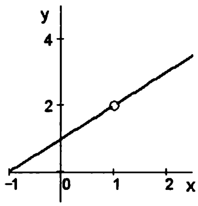
$\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$; Funktionsgraph besitzt Lücke an der Stelle $x = 1$

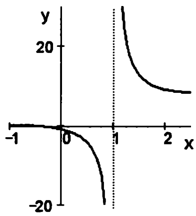
l) Definitionslücke: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1$; $x \neq 1$: $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 3 + \frac{4}{x-1}$ (Pol. div.)

$\lim\limits_{x\to 1-}\left(x + 1 - \frac{2}{(x-1)^2}\right) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1+}\left(x^2 + 2 - \frac{2}{(x-1)^2}\right) = \infty$; $x = 1$ ist Polstelle

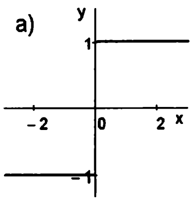

zu i)


zu j)


zu k)


zu l)

3.3 a)

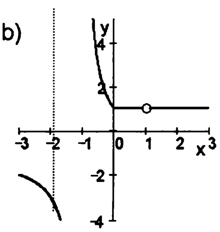


$x_0 = 0$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} = +1$$

b)



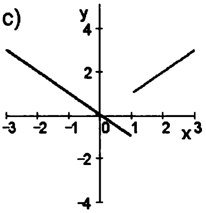
$x_1 = -1$: Polstelle;
$x_2 = 1$: Stelle mit Lücke im Graphen;

$$\lim_{x\to -1-}\frac{1-x}{1-|x|} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{1-x}{1-|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-|x|} = 1$$

3.3 c)

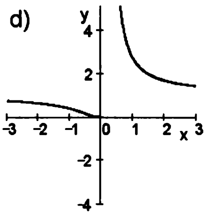


$x_0 = 1$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x \cdot |x-1|}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x \cdot |x-1|}{x-1} = +1$$

d)

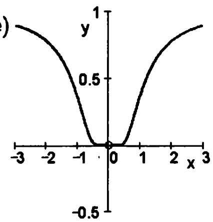


$x_0 = 0$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

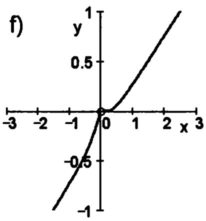
e)



$x_0 = 0$: Stelle mit Lücke im Graphen;

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

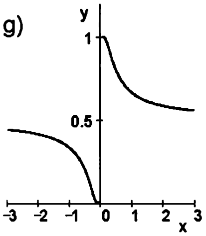
f)



$x_0 = 0$: Stelle mit Lücke im Graphen;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

g)

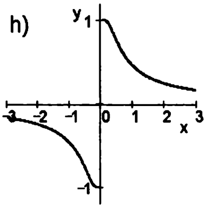


$x_0 = 0$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 1$$

h)

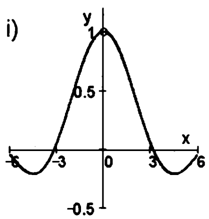


$x_0 = 0$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = -1\,;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = 1$$

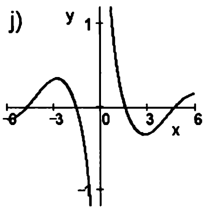
i)



$x_0 = 0$: Stelle mit Lücke im Graphen;

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

j)

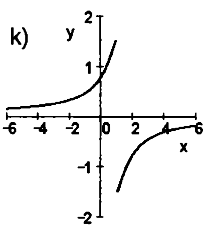


$x_0 = 0$: Polstelle;

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\cos x}{x} = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$$

k)

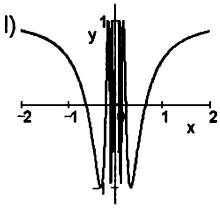


$x_0 = 1$: Sprungstelle;

$$\lim_{x\to 1-} \arctan\frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}\,;$$

$$\lim_{x\to 1+} \arctan\frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}$$

l)



$x_0 = 0$: "Oszillations-stelle";

hier gibt es keinen Grenzwert!

3.4 a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2\cdot(x-2)(x+2)} = \frac{1}{8}$

d) Polynomdivision: $(x^2-x-6):(x-3) = x+2$; $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5$

e) $\lim\limits_{x\to 3+} \frac{x+2}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3+} \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

3.4 g) $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{(x+1)^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x^3+1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x^2+x+1}{x-1}=-\infty$

i) Polynomdivision $(x^3+8):(x+2)=x^2-2x+4$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)=12$

j) Polynomdivision $(x^2-7x+12):(4-x)=3-x$; $\lim\limits_{x\to 3+}\frac{4-x}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3+}\frac{1}{3-x}=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}+2\right)=2$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos x=2$

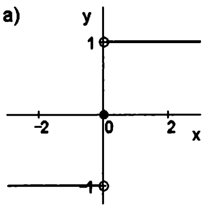
o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=1$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}2\sin x=0$

3.5 a) $\lim\limits_{x\to 3-}\sqrt{3-x}=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty$ f) $\lim\limits_{x\to 1+}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\infty$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=\infty$

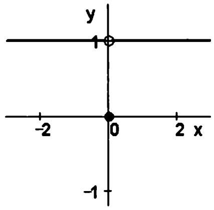
3.6 a)



$\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn}(x)=-1$;

$\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn}(x)=+1$

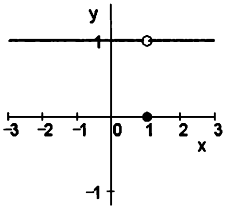
b)



$\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn}(x^2)=1$;

$\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn}(x^2)=1$

c)



$\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn}(x-1)^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1-}\operatorname{sgn}(x-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn}(x-1)^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1+}\operatorname{sgn}(x-1)^2=1$

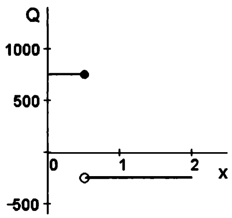
3.7 a) Unstetigkeitsstelle: 0 b) Unstetigkeitsstellen: -1, 1

3.8 a) Unstet.stellen: ..., -2T, -T, 0, T, 2T, ... sowie ..., T/3 - 2T, T/3 - T, T/3, T/3 + T, T/3 + 2T, ...
$\lim\limits_{t\to 0-}y(t)=0$; $\lim\limits_{t\to 0+}y(t)=1$

b) Unstetigkeitsstellen: ..., -2T, -T, 0, T, 2T, ... ; $\lim\limits_{t\to 0-}y(t)=1$; $\lim\limits_{t\to 0-}y(t)=0$

3.9 a) $\lim\limits_{x\to a-}Q(x)=F\cdot\frac{L-a}{L}=F-F\cdot\frac{a}{L}$; $\lim\limits_{x\to a+}Q(x)=-F\cdot\frac{a}{L}$;
die beiden einseitigen Grenzwerte sind an der Stelle $x_0=a$ ungleich, weshalb die Funktion Q(x) dort unstetig ist.

b) $Q(x)=\begin{cases}750\,\text{N} & \text{für}\quad x\le 0{,}5\,\text{m}\\ -250\,\text{N} & \text{für}\quad x>0{,}5\,\text{m}\end{cases}$



zu b)

3.10 Stetigkeit heißt, dass der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist:

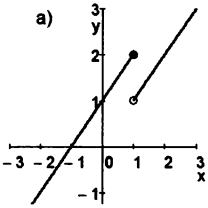
a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 2\cdot 2+1 = 5$ b) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3\cdot 3 = 9$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2-4x}{x} = \frac{2-4\cdot(-1)}{-1} = -6$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \frac{0}{2}-1 = -1$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-4x^2}{x+1} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to -2}(1-x)^3 = 27$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(-x+x^2-\frac{2}{x+1}\right) = -1+1^2-\frac{2}{1+1} = -1$

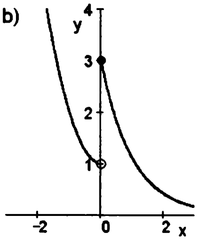
3.11

a)



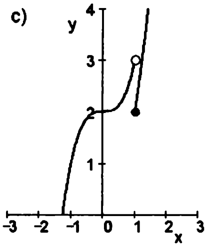
Unstetig bei $x_0 = 1$;
$\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 1$

b)



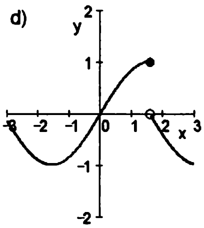
Unstetig bei $x_0 = 0$;
$\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 3$

c)



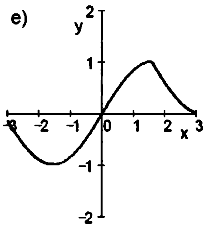
Unstetig bei $x_0 = 1$;
$\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 2$

d)



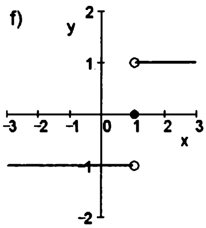
Unstetig bei $x_0 = \pi/2 = 1{,}57$;
$\lim\limits_{x\to \pi/2-} y(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to \pi/2+} y(x) = 0$

e)



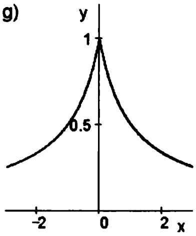
Stetige Funktion

f)



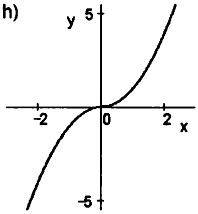
Unstetig bei $x_0 = 1$;
$\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 1$

g)



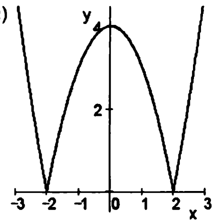
Stetige Funktion

h)



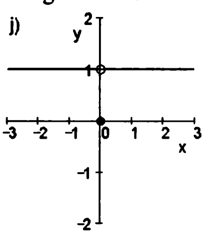
Stetige Funktion

i)



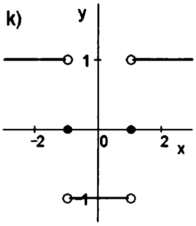
Stetige Funktion

j)



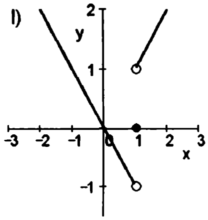
Unstetig bei $x_0 = 0$;
$\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0+} y(x) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} y(x) = 1$

k)



Unstetig bei -1 und 1;
$\lim\limits_{x\to -1-} y(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to -1+} y(x) = -1$
$\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 1$

l)

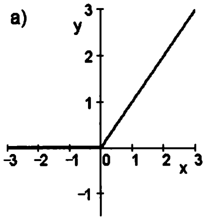


Unstetig bei 1;
$\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 1$

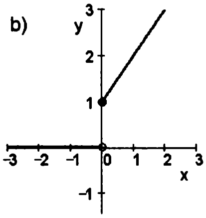
3.12 Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert müssen gleich sein (und zwar gleich dem Funktionswert):
a) $x = 1$: $1+c = -1 \Rightarrow c = -2$ b) $x = 0$: $2\cdot 0 + c = e^{-0} \Rightarrow c = 1$ c) $x = 2$: $2^3 + c = 2^2 + 1 \Rightarrow c = -3$

3.13 Unstetig an allen Stellen gleich einer ganzen Zahl außer null;
Sei x_0 eine negative ganze Zahl, etwa -2 : $\lim\limits_{x\to -2-} \text{int}(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to -2+} \text{int}(x) = -2+1 = -1$; analog bei allen negativen ganzen Zahlen.
Sei nun x_0 eine positive ganze Zahl, etwa 2 : $\lim\limits_{x\to 2-} \text{int}(x) = 2 - 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to 2+} \text{int}(x) = 2$; analog bei allen positiven ganzen Zahlen.

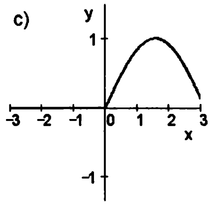
3.14



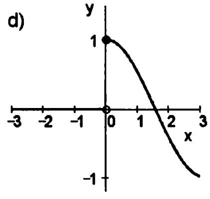
stetige Funktion



unstetig bei $x_0 = 0$

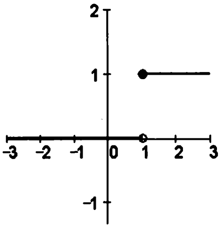


stetige Funktion

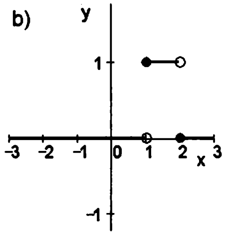


unstetig bei $x_0 = 0$

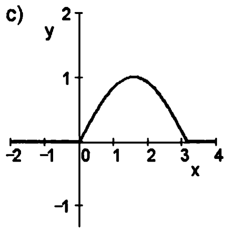
3.15



unstetig bei $x_0 = 1$



unstetig bei $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$



stetige Funktion

3.16 a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{3-x^2} = 0$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x+2} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$ h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+2)-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\frac{1}{x+2}\right) = 1$

i) $\frac{x^2+1}{x^3} = \frac{(x^2+1)/x^3}{x^3/x^3} = \frac{1/x+1/x^3}{1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = 0$

j) $\frac{6x^2-3}{2x^2+x-1} = \frac{(6x^2-3)/x^2}{(2x^2+x-1)/x^2} = \frac{6-3/x^3}{2+1/x-1/x^2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6-3/x^3}{2+1/x-1/x^2} = \frac{6-0}{2+0-0} = 2$

k) $\frac{x^2-1}{2x+1} = \frac{(x^2-1)/x^2}{(2x+1)/x^2} = \frac{1-1/x^2}{2/x+1/x^2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-1/x^2}{2/x+1/x^2} = \infty$ (Zähler geht gegen 1, Nenner geht gegen 0)

l) $\frac{3x^3-x^2+1}{x^3+x-4} = \frac{(3x^3-x^2+1)/x^3}{(x^3+x-4)/x^3} = \frac{3-1/x+1/x^3}{1+1/x^2-4/x^3}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3-1/x+1/x^3}{1+1/x^2-4/x^3} = \frac{3-0+0}{1+0-0} = 3$

3.17 Da auch die Asymptoten gefragt sind, wird die Polynomdivision angewandt:

a) $y=\frac{x^2}{x-1}=x^2:(x-1)=x+1+\frac{1}{x-1}$ $\Rightarrow$ Asymptoten: x = 1; y = x+1;

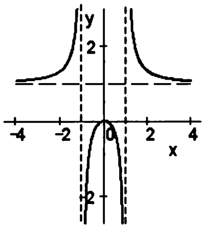
b) $y=\frac{2x^2-3x-1}{x-2}=\left(2x^2-3x-1\right):(x-2)=x-1-\frac{3}{x-2}$ $\Rightarrow$ Asymptoten: x = 2; y = 2x+1

c) $y=\frac{3x^3}{x^2+1}=\left(3x^3\right):\left(x^2+1\right)=3x-\frac{3x}{x^2+1}$ $\Rightarrow$ Asymptote: y = 3x;

d) $y=\frac{2x^3-x+1}{1-x^2}=\left(2x^3-x+1\right):\left(1-x^2\right)=-2x-\frac{1}{x-1}$ $\Rightarrow$ Asymptoten: x = 1; x = -1; y = -2x;

e) $y=\frac{x^2-2}{2\cdot(x-2)}=\left(x^2-2\right):(2x-4)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{x-2}$ $\Rightarrow$ Asymptoten: x = 2; $y=\frac{1}{2}\cdot x+1$;

f) $y=\frac{x^2}{x^2-1}=\left(x^2\right):\left(x^2-1\right)=1+\frac{1}{2\cdot(x-1)}-\frac{1}{2\cdot(x+1)}$



$\Rightarrow$ Asymptoten: x = 1; x = -1; y = 1;
hier führt die Polynomdivision auf „1 + ∞ - ∞“; daraus ist der Grenzwert nicht erkennbar. Daher wird durch die höchste vorkommende Potenz von x dividiert:

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2-1/x^2}=\frac{1/x^2}{1-1/x^2};\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1/x^2}{1-1/x^2}=\frac{0}{1-0}=0.$$

g) $y=\frac{2x^3-x}{x^2}=\left(2x^3-x\right):\left(x^2\right)=2x-\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ Asymptoten: x = 0; y = 2x;

h) $y=\frac{4x^3-x^2}{x^2+1}=\left(4x^3-x^2\right):\left(x^2+1\right)=4x-1+\frac{1-4x}{x^2+1}$ $\Rightarrow$ Asymptote: y = 4x-1

3.18 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\lg 1-\lg x)=-\infty$, da $\lg 1=0$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\ln x\right)=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}2=2$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\lg 10x}{\lg x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\lg 10+\lg x}{\lg x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\lg x}+1\right)=1$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+2^x}{1+2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$, da $-1\le\sin x\le 1$ und deswegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+0}{1+0}=1$, da wieder $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-0}{1+0}=1$, da $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}=0$

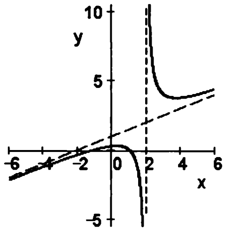
j) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{50}{1+e^{-0,1\cdot(t-40)}}=50$, da $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-0,1\cdot(t-40)}=0$

3.19 a) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x^2-1}{2x-4}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-1}{2x-4}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-1/x^2}{2/x-4/x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{2x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-1/x^2}{2/x-4/x^2}=-\infty$

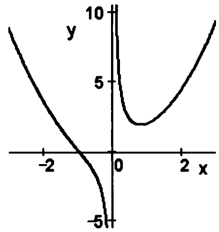


3.20 a) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^3+1}{x}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^3+1}{x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$



3.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\dfrac{r\cdot(r+x)}{x}\right)=4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{r+x}{x}=4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{r}{x}+1\right)=4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r$

3.22 a) $W_\infty=\lim\limits_{h\to\infty}\left(G\cdot M\cdot m\cdot\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+h}\right)\right)=G\cdot M\cdot m\cdot\left(\dfrac{1}{r}-\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{1}{r+h}\right)=G\cdot M\cdot m\cdot\dfrac{1}{r}=6{,}25\cdot10^7\ \mathrm{J}$

b) Fluchtgeschwindigkeit $v=\sqrt{\dfrac{2\cdot W_\infty}{m}}\approx 40250\ \mathrm{km/h}$

3.23 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(3{,}00\mathrm{A}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{7,5}}\right)\right)=3{,}00\mathrm{A}\cdot\left(1-\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\frac{t}{7,5}}\right)=3{,}00\ \mathrm{A}\cdot(1-0)=3{,}00\ \mathrm{A}$ als “Endwert”;

$t=3\tau$: $i=2{,}85$ A = 95% des Endwertes; $i=5\tau$: $i=0{,}99$ A = 99,3% des Endwertes

3.24 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(5\delta_0\cdot\left(1-0{,}8\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)=5\delta_0\cdot\left(1-0{,}8\cdot\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=5\delta_0-0{,}8\cdot0=5\delta_0$

3.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\pi r^2\cdot x}{r+x}=2\pi r^2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{r+x}=2\pi r^2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{r}{x}+1}=2\pi r^2\approx 2{,}5\cdot10^8\ \mathrm{km}^2$, Halbkugelfläche

4 Differentialrechnung

4.1 a) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x_0 + \Delta x) - 2 - \left[\frac{1}{2}x_0 - 2\right]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}$;

Tangente: $y = k \cdot x + d = \frac{1}{2}x + d$; P(2/-1) $\Rightarrow$ d = -2; $y = \frac{1}{2} \cdot x - 2$

b) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 2 - \left[x_0^2 + 2\right]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 4$;

Tangente: $y = k \cdot x + d = 4x + d$; P(2/6) $\Rightarrow$ d = -2; $y = 4x - 2$

c) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}5(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - \left[0{,}5x_0^2 + 1\right]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(x_0 + 0{,}5\Delta x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}(x_0 + 0{,}5 \cdot \Delta x \cdot x_0) = x_0 = 1$; Tangente: $y = 1 \cdot x + d$; P(1/1,5) $\Rightarrow$ d = 0,5; $y = x + 0{,}5$

d) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x_0^2 = 3$; Tangente: $y = 3 \cdot x + d$; P(1/1) $\Rightarrow$ d = -2; $y = 3x - 2$

e) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^3 - 1 - \left[2x_0^3 - 1\right]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} =$;

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 6x_0^2 = 6$; Tangente: $y = 6x + d$; P(-1/-3) $\Rightarrow$ d = 3; $y = 6x + 3$

f) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 1 - \left[2x_0^2 - 4x_0 + 1\right]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x - 2)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 \cdot (2x_0 + \Delta x - 2) = 4x_0 - 4 = -4$; $y = -4x + d$; P(0/1) $\Rightarrow$ d = 1: $y = -4x + 1$

4.2 a) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{((x + \Delta x) + 2)^2 - (x + 2)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (\Delta x + 2x + 4)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 2x + 4) = 2x + 4$;

$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$; P(-2/0); Tangente: $y = 0$

b) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(-(x + \Delta x)^2 + 2 \cdot (x + \Delta x) - 4\right) - \left(-x^2 + 2x - 4\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-2x \cdot \Delta x - \Delta x^2 + 2 \cdot \Delta x}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}(-2x - \Delta x + 2) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$; P(1/-3); Tangente: $y = -3$

c) $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2 \cdot (x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)^2 - 1\right) - \left(2x^3 + x^2 - 1\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta x^2 + 2x + \Delta x\right) =$

$= 6x^2 + 2x = x \cdot (6x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1/3 = -0{,}333$ (Produkt-Null-Satz);

P_1(-0,333/-0,963), Tangente t_1: $y = -0{,}963$; P_2(0/-1), Tangente t_2: $y = -1$

4.3 a) $f(x) = (x-2)^2$, $k = 2$:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-2)^2-(x-2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x+\Delta x-4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x-4) = 2x - 4 = 2$$

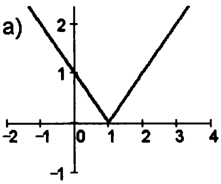
$\Rightarrow$ $x = 3$; $f(3) = 1$; P(3/1); Tangente: $y = 2x + d$; $1 = 2\cdot 3 + d$ $\Rightarrow$ $d = -5$; $y = 2x - 5$

b) $f(x) = x^2 - x$, $k = 3$:

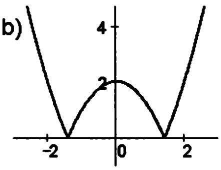
$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - (x^2 - x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot (2x+\Delta x-1) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x-1) = 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2;\ f(2) = 2;\ P(2/2);$$

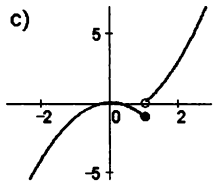
Tangente: $y = 3x + d$; $2 = 3\cdot 2 + d$ $\Rightarrow$ $d = -4$; $y = 3x - 4$

4.4 a) 

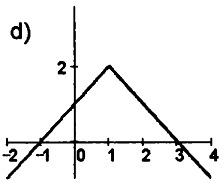
Spitze an $x_0 = 1$, keine Tangente

b) 

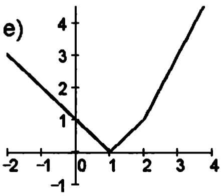
Spitze an den Stellen $x_1 = -\sqrt{2}$ sowie $x_2 = \sqrt{2}$, dort keine Tangente

c) 

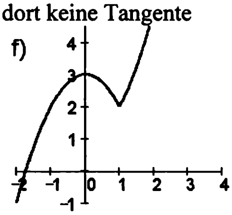
unstetig an der Stelle $x_0 = 1$, dort keine Tangente

d) 

Spitze an $x_0 = 1$, keine Tangente

e) 

Spitze an den Stellen $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$, dort keine Tangente

f) 

Spitze an $x_0 = 1$, keine Tangente

4.5 a) $y' = 3x^2$; $y'(1{,}5) = 6{,}75$; b) $y' = 8x^7$; $y'(1{,}5) = 136{,}7$ c) $y' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; $y'(1{,}5) = 0{,}254$

d) $y' = -\frac{2}{x^3}$; - 0,593 e) $y' = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2\cdot x\sqrt{x}}$; - 0,272 f) $y' = -\frac{3}{x^4}$; 0,593

g) $y' = 6x^5$; 45,56 h) $y' = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{x}}{2}$; 1,837

i) $y' = \frac{5}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{x^3}}{2} = \frac{5\cdot x\cdot\sqrt{x}}{2}$; 4,593 j) $y' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$; 0,582

k) $y' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}$; - 0,272 l) $y' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$; 0,582

m) $y' = -\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\cdot x^2\sqrt{x}}$; –0,544 n) $y' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\cdot x\sqrt{x}}$; - 0,272

o) $y' = \frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^5}}$; 0,119 p) $y' = -\frac{4}{3}\cdot x^{-\frac{7}{3}} = -\frac{4}{3x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$; - 0,518

4.6 a) $y' = 2x$, $y'(1) = 2$; $\tan\alpha = 2$ $\Rightarrow$ $\alpha = 63{,}4°$

b) $y' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$; $y'(2) = 0{,}210$; $\tan\alpha = 0{,}210$ $\Rightarrow$ $\alpha = 11{,}9°$

c) $y' = e^x$; $y'(0) = 1$; $\tan\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha = 45°$

d) $y' = 2^x \cdot \ln 2$; $y'(0) = 0{,}693$; $\alpha = 34{,}7°$ e) $y' = \frac{1}{x}$; $y'(1) = 1$; $\alpha = 45°$

f) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y'(0) = 1$; $\alpha = 45°$ g) $y' = -\sin x$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $\alpha = -45°$

h) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'(0) = 1$; $\alpha = 45°$ i) $y' = \cosh x$; $y'(1) = 1{,}543$; $\alpha = 57{,}1°$

4.7 a) $y' = 2x = \tan 30° = 0{,}577 \Rightarrow x = 0{,}289$ b) $y' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \tan 25° = 0{,}466 \Rightarrow x = 0{,}604$

c) $y' = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} = \tan(-30°) \Rightarrow x = 0{,}909$ d) $y' = e^x = \tan 45° \Rightarrow x = 0$

e) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan 60° \Rightarrow x = \pm 0{,}708 + k\cdot\pi$, k ganze Zahl

f) $y' = \sinh x = \tan 45° \Rightarrow x = 0{,}881$

4.8 a) x–Koordinate(n) der Schnittpunkte von $y = f_1(x) = x^2$ und $y = f_2(x) = \sqrt{x}$: $x^2 = \sqrt{x}$, daraus nach Quadrieren $x^4 = x$ oder $x^4 - x = 0$;
Herausheben: $x\cdot(x^3 - 1) = 0$; Produkt–Null–Satz: $x = 0$ sowie $x^3 - 1 = 0$; Lösungen: $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 1$; Beschränkung auf die positive Lösung $x_2 = 1$.

$f_1'(x) = 2x$; $f_1'(1) = 2 = \tan\alpha$; $f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f_2'(1) = \frac{1}{2} = \tan\beta$;

$$\tan\varphi = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 36{,}9°$$

b) Wie Beispiel 4.5, Seite 101 im Lehrbuch, aber mit vertauschten Bezeichnungen für $f_1(x)$ und $f_2(x)$; $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$; Quadrieren und Umformen: $x^3 - 1 = 0$; Lösung: $x_0 = 1$; $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

$f_1'(1) = -1 = \tan\alpha$; $f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f_2'(1) = \frac{1}{2} = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{-1-\frac{1}{2}}{1+(-1)\cdot\frac{1}{2}} = -3 \Rightarrow \varphi^* = -71{,}6°$.

Der Winkel wurde, weil negativ, mit φ^* bezeichnet. Addiert man 180° zu φ^*, so erhält man $\varphi = 108{,}4°$ als Schnittwinkel. Genau so gut könnte man den dazu supplementären Winkel $180° - 108{,}4° = 71{,}6°$ als Schnittwinkel nehmen.

c) $x = \frac{1}{x^2}$; Schnittstelle $x_0 = 1$; $f_1'(x) = 1 = \tan\alpha$; $f_2'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f_2'(1) = -2 \tan\beta$;

$\tan\varphi = \frac{1-(-2)}{1+1\cdot(-2)} = -3 \Rightarrow \varphi^* = -71{,}6°$; Schnittwinkel $\varphi = \varphi^* + 180° = 108{,}4°$ oder supplementär $180° - 108{,}4° = 71{,}6°$

d) Rechnung im Bogenmaß: $\sin x = \cos x$; Division durch $\cos x$: $\tan x = 1$; Lösung in $0 < x < \pi$: , $x_0 = 0{,}785 = \pi/4$; $f_1'(x) = \cos x$; $f_1'(\pi/4) = 0{,}707 = \tan\alpha$; $f_2'(x) = -\sin x$;
$f_2'(\pi/4) = -0{,}707 = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{0{,}707-(-0{,}707)}{1+0{,}707\cdot(-0{,}707)} = 2{,}828 \Rightarrow \varphi = 70{,}5°$.

e) Rechnung im Bogenmaß: $\cos x = \tan x = \sin x/\cos x$; Multiplikation mit $\cos x$: $\cos^2 x = \sin x$ oder $1 - \sin^2 x = \sin x$; setzt man $u = \sin x$, so erhält man eine quadratische Gleichung für u: $u^2 + u - 1 = 0$; $u_1 = 0{,}618$, $u_2 = -1{,}618$;
$\sin x = 0{,}618 \Rightarrow x_0 = 0{,}666$ ($\sin x = -1{,}618$ ist nicht möglich, da ein Sinuswert zwischen -1 und 1 liegt).
$f_1'(x) = \sin x$; $f_1'(x_0) = 0{,}618 = \tan\alpha$; $f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f_2'(x_0) = 1{,}618 = \tan\beta$;

$$\tan\varphi = \frac{0{,}618-1{,}618}{1+0{,}618\cdot(-1{,}618)} = „\frac{-1}{0}“ \Rightarrow \varphi = 90°.$$

4.9 a) $f'(x) = 3x^2$; $f'(1) = 3 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -\frac{1}{3}$; $f(1) = 1$; Berührpunkt $P_0(1/1)$;

Normale $y = -\frac{1}{3}\cdot x + d$; $1 = -\frac{1}{3}\cdot 1 + d \Rightarrow d = \frac{4}{3}$; $y = -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{4}{3}$

b) $f'(x) = e^x$; $f'(0) = 1 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -1$; $P_0(0/1)$; $y = -x + d$; $1 = 0 + d \Rightarrow d = 1$; $y = -x + 1$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(4) = 1/4 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -4$; $P_0(4/2)$; $y = -4x + 18$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -1$; $P_0(1/0)$; $y = -x + 1$

e) $f'(x) = \cosh x$; $f'(1) = 1{,}543 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -0{,}648$; $P_0(1/1{,}175)$; $y = -0{,}648\cdot x + 1{,}823$

f) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f'(0) = 1 = -1/k_N \Rightarrow k_N = -1$; $P_0(0/0)$; $y = -x$

4.10 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$ oder $x_2 = -\sqrt{2}$

4.11 a) $y' = 3x^2$ b) $y' = 4x$ c) $y = \frac{1}{2}\cdot x$; $y' = \frac{1}{2}$

d) $y' = -2\cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ e) $y = \frac{1}{3}\cdot x^{-1}$; $y' = -\frac{1}{3\cdot x^2}$ f) $y = x^{-2}$; $y' = -\frac{2}{x^3}$

g) $y = \frac{1}{4}\cdot x^{-3}$; $y' = -\frac{3}{4x^4}$ h) $y = 9\cdot x^2$; $y' = 18x$ i) $y = x^{1/3}$; $y' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

j) $y = x^{3/2}$; $y' = \frac{3\cdot\sqrt{x}}{2}$ k) $y = x^{1/2}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ l) $y = \sqrt{2}\cdot x^{1/2}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

m) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-1/2}$; $y' = -\frac{1}{2x\cdot\sqrt{2x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x^{1/2}$; $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3x}}$ m) $y = x^{5/6}$; $y' = \frac{5}{6\cdot\sqrt[6]{x}}$

4.12 a) $y = \ln x - \ln 5$; $y' = \frac{1}{x}$ b) $y = \ln 1 - \ln(5x) = 0 - \ln 5 - \ln x$; $y' = -\frac{1}{x}$

c) $y = \frac{1}{2}\cdot\ln x = \frac{1}{2}\cdot\ln x$; $y' = \frac{1}{2x}$ d) $y = \frac{1}{2}\cdot\ln(2x) = \frac{1}{2}\cdot(\ln 2 + \ln x) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\ln x$; $y' = \frac{1}{2x}$

e) $y = 2\cdot\lg x - \lg 10 = 2\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x - 1$; $y' = \frac{2}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$

4.13 a) $y' = 4x + 2$ b) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ c) $y' = 4x^3 + 8x + 2$ d) $y' = -\frac{6}{x^3} + \frac{4}{x^2}$

e) $y' = -\frac{3}{2x^4} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{4}$ f) $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}$; $y' = \frac{1}{2}$ g) $y = 1 + x^{-1}$; $y' = -\frac{1}{x^2}$

h) $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^{-1}$; $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$ i) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x}}$

4.14 a) $y' = \sin x + \frac{3}{\cos^2 x}$ b) $y = \frac{1}{2}\cdot\tan x$; $y' = \frac{1}{2\cdot\cos^2 x}$ c) $y' = \frac{1}{2} + e^x$

d) $y = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2^x$; $y' = \frac{1}{2}\cdot(6x - 2^x\cdot\ln 2)$ e) $y' = \frac{1}{x}$ f) $y = x + 3\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x$; $y' = 1 + \frac{3}{x\cdot\ln 10}$

4.15 Anwendung der Produktregel:

a) $y' = 4x - 5$ b) $y' = 8x + 4$ c) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ d) $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + 4x - \frac{1}{x^2}$

e) $y = 1 - x$; $y' = -1$ f) $y = \sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} + x$; $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x} + 1$

4.16 a) $y' = -3a^2\cdot x^2 - 4a\cdot x + 3a$ b) $f(t) = t^{2/3} + \sqrt[3]{a} + a\cdot t^2$; $y' = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{t}} + 2a\cdot t$

c) $f(x) = \frac{1}{b}\cdot x^{-2} + b^2\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}$; $f'(x) = -\frac{2}{b\cdot x^3} + 2\cdot b^2\cdot x + \frac{1}{4\cdot\sqrt{x}}$ d) $f'(h) = \sqrt{a} + \frac{1}{3\cdot a\cdot\sqrt[3]{h^2}} + \frac{a^2}{2}$

4.17 a) $f'x) = 2s\cdot x$ b) $f's) = x^2$ c) $f'(t) = 1$ d) $f'(x) = s\cdot t$

e) $f'(t) = t\cdot x$ f) $f'(t) = s\cdot x$ g($f'(x) = s^2 + 2s\cdot x$ h) $f'(s) = 2s\cdot x + x^2$

4.18 a) $y' = 4x;\ y'(1) = 4$ b) $y' = -\frac{1}{x^2};\ y'(-3) = -\frac{1}{9}$ c) $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + 2;\ y'(3) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} + 2 = 2{,}289$

d) $y' = \frac{e^x}{2};\ y'(0) = \frac{1}{2}$ e) $y' = -\cos x;\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}707$ f) $y' = 1 + \cos x;\ y'(-2) = 0{,}584$

4.19 a) $y_0 = -13{,}5$; $y' = 1{,}5\cdot x^2$; $y'(-3) = 13{,}5 = k$; $y = k\cdot x + d$; $y_0 = 13{,}5\cdot(-3) + d \Rightarrow d = 27$; $y = 13{,}5\cdot x + 27$
b) $y_0 = -1$; $y' = 2\cdot x$; $y'(0) = 0 = k$; $y = k\cdot x + d$; $y_0 = 0 + d \Rightarrow d = -1$; $y = -1$
c) $y_0 = 9$; $y' = 2\cdot(x-1)$; $y'(-2) = -6 = k$; $y = k\cdot x + d$; $y_0 = -6x + d \Rightarrow d = -3$; $y = -6x - 3$
d) $y_0 = -2{,}121$; $y' = 3\cdot\cos x$; $y'(-\pi/4) = 2{,}121 = k$; $y = k\cdot x + d$; $d = -0{,}455$; $y = 2{,}121x - 0{,}455$
e) $y_0 = -0{,}460$; $y' = 1 - \sin x$; $y'(-1) = 1{,}841 = k$; $y = k\cdot x + d$; $d = 1{,}382$; $y = 1{,}841\cdot x + 1{,}382$
f) $y_0 = 9$; $y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{3}$; $y'(-2) = -9{,}888$; $y = -9{,}888\cdot x + d$; $d = -10{,}775$; $y = -9{,}888\cdot x - 10{,}775$

4.20 a) $y' = 4x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$; $y(0) = 1$; Q(0/1)
b) $y' = 2x + 4 = 0{,}5 \Rightarrow x_0 = -1{,}75$; Q(–1,75/0,0625)
c) $y' = \frac{1}{2\cdot\ln 10}\cdot\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x_0 = 0{,}217$; Q(0,217/–0,332)
d) $y' = -2\cdot e^x = -2$ oder $e^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0$; Q(0/–2)
e) $y' = 2^x\cdot\ln 2 = 1$ oder $2^x = 1/\ln 2 = 1{,}443$; beidseitiges Logarithmieren: $x\cdot\ln 2 = \ln 1{,}443 \Rightarrow$
$x_0 = 0{,}529$; Q(0,529/1,443)
f) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $y' = \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{2} = 2$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{\ln 3/2} = 4{,}933$; beidseitiges Logarithmieren:
$x\cdot\ln 1{,}5 = \ln 4{,}933 \Rightarrow x_0 = 3{,}936$; Q(3,936/4,933)

4.21 a) $f'(x) = \cos x = 0{,}5 \Rightarrow x_1 = 1{,}047$ sowie $x_2 = 2\pi - x_1 = 5{,}236$; P(1,047/0,866);
Q(5,236/–0,866)
b) $f'(x) = -\cos x = 0{,}9 \Rightarrow x_1 = 2{,}691$ sowie $x_2 = 2\pi - x_1 = 3{,}593$; P(2,691/–0,436);
Q(3,593/0,436)
c) $y' = 1 + \cos x = 0 \Rightarrow x_0 = \pi$; P(π/π)
d) $y' = 2 - \sin x = 1$ oder $\sin x = 1 \Rightarrow x_0 = \pi/2$; P(π/2 / π)

4.22 a) $y' = -6x = \tan 45° = 1 \Rightarrow x_0 = -1/6 = -0{,}167$; P(–0,1667/0,0833)
b) $y' = 4x = \tan 135° = -1 \Rightarrow x_0 = -0{,}25$; P(–0,25/–2,875)
c) $y' = -2x - 6 = \tan 120° = -1{,}732 \Rightarrow x_0 = -2{,}134$; P(–2,134/–0,750)
d) $y = 3^x$; $y' = 3^x\cdot\ln 3 = \tan 60° = 1{,}732$ oder $3^x = 1{,}732/\ln 3 = 1{,}577$; beidseitiges
Logarithmieren: $x\cdot\ln 3 = \ln 1{,}577 \Rightarrow x_0 = 0{,}414$; P(0,414/1,577)
e) $y = \ln x - \ln 2$; $y' = 1/x = \tan 45° = 1 \Rightarrow x_0 = 1$; P(1/–0,693)
f) $y' = -1 + e^x = \tan 60° = 1{,}732$ oder $e^x = 2{,}732$; beidseitiges Logarithmieren:
$x\cdot\ln e = \ln 2{,}732 \Rightarrow x_0 = 1{,}005$; P(1,005/1,727)

4.23 $k = \tan 135° = -1$;
a) $y' = 3x^2 - 8x + 4 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 5/3 = 1{,}667$; $P_1(1/2)$, $P_2(1{,}667/1{,}185)$;
Tangente t_1: $d = 3$; $y = -x + 3$; Tangente t_2: $d = 2{,}852$; $y = -x + 2{,}852$
b) $y' = 6x^2 - 8x = -1 \Rightarrow x_1 = 0{,}140$; $x_2 = 1{,}194$; $P_1(0{,}140/4{,}927)$; $P_2(1{,}194/2{,}702)$
Tangente t_1: $d = 5{,}067$; $y = -x + 5{,}067$; Tangente t_2: $d = 3{,}896$; $y = -x + 3{,}896$
c) $y' = -0{,}75\cdot x^2 + 2x - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}667$; $P_1(0/-0{,}25)$; $P_2(2{,}667/-0{,}546)$
Tangente t_1: $d = -0{,}25$; $y = -x - 0{,}25$; Tangente t_2: $d = 2{,}120$; $y = -x + 2{,}120$
d) $y = 0{,}5^x$; $y' = 0{,}5^x\cdot\ln 0{,}5 = -1$ oder $0{,}5^x = -1/\ln 0{,}5 = 1{,}443$; beidseitiges Logarithmieren:
$x\cdot\ln 0{,}5 = \ln 1{,}443 = 0{,}367 \Rightarrow x_0 = -0{,}529$; Tangente t: $d = 0{,}914$; $y = -x + 0{,}914$

4.24 a) $y' = 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$; $y(x_0) = -3$; Tangente t: $y = -3$
b) $y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$; $y(x_0) = 4$; Tangente t: $y = 4$
c) $y' = -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$ (nur eine Lösung); $y(x_0) = 0$; Tangente t: $y = 0$ (x–Achse)
d) $y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2/3$; $x_2 = 2$; $y(x_1) = 2{,}185$; $y(x_2) = 1$; t_1: $y = 2{,}185$; t_2: $y = 1$

4.25 a) $y' -2x + 4$; P: $y'(0) = 4 = \tan\alpha$; Q: $y'(1) = 2 = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{4-2}{1+4\cdot 2} = \frac{2}{9} \Rightarrow \varphi = 12{,}5°$

b) $y' = 3x^2 - 8x + 4$: P: $y'(0) = 4 = \tan\alpha$; Q: $y'(1) = 7 = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{4-7}{1+4\cdot 7} = -\frac{3}{29}$

$\Rightarrow \varphi^* = -5{,}9°$; $\varphi = \varphi^* + 180° = 174{,}1°$ bzw. als Supplementärwinkel 5,9°

c) $y' = \frac{1}{x}$; P: $y'(0) = 2 = \tan\alpha$; Q: $y'(1) = 1/3 = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{2-1/3}{1+2\cdot 1/3} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$

d) $y' = \frac{1}{2}\cdot e^x$; P: $y'(0) = 0{,}184 = \tan\alpha$; Q: $y'(1) = 3{,}695 = \tan\beta$; $\tan\varphi = \frac{0{,}184-3{,}695}{1+0{,}184\cdot 3{,}695} = -2{,}090$

$\Rightarrow \varphi^* = -64{,}4°$; $\varphi = \varphi^* + 180° = 115{,}6°$ bzw. als Supplementärwinkel 64,4°

4.26 $y = a x^2 + b x + c$
$y' = 2a x + b$

I: $0 = 9a + 3b + c$
II: $6 = 25a + 5b + c$
III: $2 = 6a + b$

$b = 2 - 6a$ in I und II einsetzen usw.
$\Rightarrow a = 1/2$; $b = -1$; $c = -3/2$
$y = x^2/2 - x - 3/2$

4.27 A(1/0), B(0/3)
$y'(3) = -0{,}5$
$y = a x^2 + b x + c$
$y' = 2a x + b$

I: $0 = a + b + c$
II: $3 = c$
III: $-0{,}5 = 6a + b$

$c = 3$ in I und III einsetzen usw.
$\Rightarrow y = 0{,}5\, x^2 - 3{,}5\, x + 3$

4.28 $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$
$y' = 3a x^2 + 2b x + c$
$y'(0) = \tan 45° = 1$

I: $0 = d$
II: $2 = a + b + c + d$
III: $2 = 8a + 4b + 2c + d$
IV: $1 = c$

$c = 1$ und $d = 0$ in II und III einsetzen usw.
$\Rightarrow y = -x^3 + 2x^2 + x$

4.29 a) $y' = 1\cdot(1+x^2)+(2+x)\cdot 2x = 1+4x+3x^2$

b) $y' = 3x^2\cdot(x+x^2-2)+(1+x^3)\cdot(1+2x) = 5x^4+4x^3-6x^2+2x+1$

c) $y' = (-2x^{-3}+1)\cdot(x-x^2)+(x^{-2}+x)\cdot(1-2x) = -3x^2+2x-\frac{1}{x^2}$

d) $y' = \frac{1}{2}\cdot(1+x^2)\cdot\left(3-\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot 2x\cdot\left(3-\frac{x}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot(1+x^2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{2}\cdot x^2+\frac{17}{3}\cdot x+\frac{7}{6}$

e) $y' = 2\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x}+(x-1)^2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{4x\cdot(x-1)+(x^2-2x+1)}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{5x^2-6x+1}{2\cdot\sqrt{x}}$

f) $y' = 1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+(x-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}+(x-1)\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{6\cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{6x+(x-1)\cdot 2}{6\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x-1}{3\cdot\sqrt[3]{2x^2}}$

4.30 a) $y' = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (x+1)\cdot e^x$ b) $y' = 2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x = x\cdot(2\cdot\sin x + x\cdot\cos x)$

c) $y' = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(2x)$ d) $y' = 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x) = \frac{2\cdot\tan x}{\cos^2 x} = \frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x}$

e) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; $y' = 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x) - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = -4\cdot\sin x\cdot\cos x = -2\cdot\sin(2x)$

f) $y' = 3x^2\cdot\tan x + x^3(1+\tan^2 x) = x^2\left(3\cdot\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$ g) $y' = 1\cdot\ln(x^2) + \frac{x}{x^2}\cdot 2x = 2 + \ln x^2$

h) $y = (1+x^2)\cdot(\ln x - \ln 2)$; $y' = 2x\cdot(\ln x - \ln 2) + (1+x^2)\cdot\frac{1}{x} = 2x\cdot\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + x$

i) $y = x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln x$; $y' = \frac{1}{2}\cdot(1+\ln x)$ j) $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{2}\cdot\sin x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\cos x = 2^{-x}\cdot(\cos x - \ln 2\cdot\sin x)$

k) $y' = 2^x\cdot\ln 2\cdot e^x + 2^x\cdot e^x = (2e)^x\cdot(1 + \ln 2)$ l) $y = \frac{1}{4}\cdot x^2\cdot\sin x$; $y' = \frac{x}{4}\cdot(2\sin x + x\cdot\cos x)$

4.31 a) $y' = 1\cdot e^x \cdot \sin x + x\cdot e^x \cdot \sin x + x\cdot e^x \cdot \cos x = e^x \cdot (\sin x + x\cdot \sin x + x\cdot \cos x)$

b) $y' = \cos^3 x - 2\cdot \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x \cdot \left(\cos^2 x - 2\sin^2 x\right) = \cos x \cdot \left(1 - 3\sin^2 x\right)$

c) $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$ d) $y' = 3\cdot e^{3x}$

4.32 a) $y'(x) = b\cdot(c - d\cdot x) + (a + b\cdot x)\cdot(-d) = b\cdot c - a\cdot d - 2b\cdot d\cdot x$

b) $\dfrac{df(t)}{dt} = \cos t\cdot(t+b) + (a + \sin t)\cdot 1 = a + \sin t + (b+t)\cdot \cos t$

c) wie b) d) $\dfrac{df(h)}{dh} = \dfrac{3}{8}\cdot(1+2h)^2\cdot 2 = \dfrac{3}{4}\cdot(1+2h)^2$ e) $\dfrac{df(s)}{ds} = 2\cdot\left(1+\sqrt{s}\right)\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{s}} = \dfrac{1}{\sqrt{s}} + 1$

f) $\dfrac{df(u)}{du} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{u}}\cdot\left(1 - \dfrac{u}{2}\right) + \left(1+\sqrt{u}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{u}} - \dfrac{u}{4\cdot\sqrt{u}} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{u}}{2} = \dfrac{2-3u-2\cdot\sqrt{u}}{4\cdot\sqrt{u}}$

4.33 a) $y' = \dfrac{2x^2 - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ b) $y' = \dfrac{-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ c) $y' = \dfrac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

d) $y' = \dfrac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x\cdot(1-x)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$ e) $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1) - \sqrt{x}\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{1-x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$

f) $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1-\sqrt{x})^2}$ g) $y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2-\ln x}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}$

h) $y' = \dfrac{-\frac{2}{2x}\cdot x - (1-\ln x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{-2+\ln 2x}{x^2}$

4.34 a) $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ b) $y' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

c) $y' = \dfrac{2x\cdot\cos x - 2\cdot\sin x}{4x^2} = \dfrac{x\cdot\cos x - \sin x}{2x^2}$ d) $y' = \dfrac{1 - \cos x - x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}$

e) $y' = \dfrac{(\cos x - \sin x)\cdot x - (\sin x + \cos x)}{x^2} = \dfrac{(x-1)\cdot\cos x - (x+1)\cdot\sin x}{x^2}$

f) $y' = \dfrac{\cos x\cdot(\sin x + \cos x) - \sin x\cdot(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{1}{1 + 2\cdot\sin x\cdot\cos x} = \dfrac{1}{1+\sin(2x)}$

g) $y' = \dfrac{(\cos x + \sin x)\cdot(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\cdot(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2} = \dfrac{2}{1+\sin(2x)}$

h) $y' = \dfrac{(\cos x - \sin x)\cdot\sin x\cdot\cos x - (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin x\cdot\cos x)^2} = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

i) $y' = \dfrac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot(\sin x + \cos x) - \sin x\cdot\cos x\cdot(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin(2x)}$

4.35 a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{a\cdot(t-1) - a\cdot t}{(t-1)^2} = -\dfrac{a}{(t-1)^2}$ b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2a\cdot t\cdot(t^2-1) - a\cdot t^2\cdot 2t}{(t^2-1)^2} = -\dfrac{2a\cdot t}{(t^2-1)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2\cdot(a+1)\cdot t\cdot(t-1) - (a+1)\cdot t^2}{(t-1)^2} = \dfrac{(a+1)(t-2)\cdot t}{(t-1)^2}$ d) $y = \dfrac{t^2 - a^2}{t-a} = t + 1;\ \dfrac{dy}{dt} = 1$

4.36 a) $$\frac{dy}{dh}=\frac{\left(\sqrt{h}+\frac{h+2}{2\cdot\sqrt{h}}\right)\cdot e^h-(h+2)\cdot\sqrt{h}\cdot e^h}{e^{2h}}=\frac{e^h\cdot\left(\frac{3h+2}{2\cdot\sqrt{h}}-(h+2)\cdot\sqrt{h}\right)}{e^{2h}}=\frac{2-h-2h^2}{2\cdot\sqrt{h}}\cdot e^{-h}$$

b) $$y'=\frac{(\ln x+1)\cdot(x+1)-x\cdot\ln x}{(x+1)^2}=\frac{1+x+\ln x}{(x+1)^2}$$

c) $$y'=\frac{x-(1+x)}{x^2}\cdot e^x+\frac{-1+x}{x}\cdot e^x=e^x\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{-1+x}{x}\right)=\frac{e^x}{x^2}\cdot\left(x^2+x-1\right)$$

d) $$\frac{dy}{dr}=\frac{-r^2+2r+3}{(1-r)^2}\cdot\frac{1}{r}-\frac{(1+r)^2}{1-r}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{(-r^2+2r+3)\cdot r-(1+r)^2\cdot(1-r)}{r^2(1-r)^2}=\frac{(3r-1)(r+1)}{r^2(1-r)^2}$$

e) $$y'=\frac{\frac{\sin x\cdot\cos x+x}{\cos^2 x}\cdot\sin x-x\cdot\tan x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x+x\cdot\sin x-x\cdot\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x+x\cdot\sin x\cdot(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin x\cdot\cos x+x\cdot\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$$

f) $$\frac{dy}{dt}=\tan t+\frac{t}{\cos^2 t}=\frac{\sin t\cdot\cos t+t}{\cos^2 t}$$

g) $$y=\frac{2\cdot\tan x}{1+\tan^2 x}=\sin(2x)\,;\ y'=2\cdot\cos(2x)$$

h) $$y=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x\,;\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan x+\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\cdot\tan x}{\cos^2 x}=\frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x}$$

4.37 a) $$y'=\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}=\frac{1}{x\cdot(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{x^2}$$

b) $$y'=\frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}-e^x\cdot\arcsin x}{e^{2x}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{e^x\cdot\sqrt{1-x^2}}=e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x\right)$$

c) $$y'=\frac{2x\cdot\cosh x-2\cdot\sinh x}{4\cdot x^2}=\frac{x\cdot\cosh x-\sinh x}{2\cdot x^2}$$

d) $y'=2\cdot\cosh x\cdot\sinh x-2\cdot\sinh x\cdot\cosh x=0$

4.38 a) $$\frac{df(t)}{dt}=\frac{\left(-\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}\right)\cdot\left(a+\sqrt{t}\right)-\left(a-\sqrt{t}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}}{\left(a+\sqrt{t}\right)^2}=\frac{\frac{-a-\sqrt{t}-a+\sqrt{t}}{2\cdot\sqrt{t}}}{\left(a+\sqrt{t}\right)^2}=\frac{\frac{-2a}{2\cdot\sqrt{t}}}{\left(a+\sqrt{t}\right)^2}=-\frac{a}{\sqrt{t}\cdot\left(a+\sqrt{t}\right)^2}$$

b) $$\frac{df(t)}{dt}=\frac{-2a\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}}{\left(a+\sqrt{t}\right)^2}=-\frac{a}{\sqrt{t}\cdot\left(a+\sqrt{t}\right)^2}$$

c) $$f'(s)=\frac{(2a+2s)\cdot\left(1+e^s\right)-(2a\cdot s+s^2)\cdot e^s}{\left(1+e^s\right)^2}=\frac{2a+2s+2a\cdot e^s+2s\cdot e^s-2a\cdot s\cdot e^s-s^2\cdot e^s}{\left(1+e^s\right)^2}=$$

$$=\frac{2a+2s+e^s\cdot\left(2a+2\cdot s-2a\cdot s-s^2\right)}{\left(1+e^s\right)^2}$$

d) $$\frac{df(t)}{dt}=-\frac{1}{a}\left(2\cdot\sin t\cdot\cos t\right)=-\frac{1}{a}\cdot\sin(2t)$$

e) $\frac{df(h)}{dh}=\frac{\left[\frac{1}{a}\cdot(1-h^2)+\left(1+\frac{h}{a}\right)\cdot(-2h)\right]\cdot(a\cdot h+1)-\left(1+\frac{h}{a}\right)\cdot\left(1-h^2\right)\cdot a}{(a\cdot h+1)^2}=\frac{\dots}{\dots}\cdot\frac{a}{a}=$

$=\frac{\left[(1-h^2)+(a+h)\cdot(-2h)\right]\cdot(a\cdot h+1)-(a+h)\cdot\left(1-h^2\right)\cdot a}{a\cdot(a\cdot h+1)^2}=\frac{-2a\cdot h^3-a^2\cdot h^2-3h^2-2a\cdot h-a^2+1}{a\cdot(a\cdot h+1)^2}$

f) $f(u)=\frac{\ln a}{(1+a)}\cdot\frac{1}{u+a\cdot u^2}$; $f'(u)=\frac{\ln a}{(1+a)}\cdot\frac{-(1+2a\cdot u)}{(u+a\cdot u^2)^2}=-\frac{(2a\cdot u+1)\cdot\ln a}{(1+a)\cdot u^2\cdot(1+a\cdot u)^2}$

4.39 a) Funktion: $y(2) = 2{,}773$; $y(2{,}2) = 3{,}816$; $y' = 2x\cdot\ln x + x$; $y'(2) = 4{,}773$;
linearisierte Funktion t: $y = y'(2)\cdot x + d = 4{,}773\cdot x + d$;
$2{,}773= 4{,}773\cdot 2 + d \Rightarrow d = -6{,}773$; t: $y = 4{,}773\cdot x - 6{,}773$; $y(2{,}2) = 3{,}727$

b) Funktion: $y(3) = 1{,}034$; $y(3{,}2) = 1{,}038$; $y' = \frac{2-\ln(2x)}{2\cdot x^{3/2}}$; $y'(3) = 0{,}0200$;
linearisierte Funktion t: $y = y'(3)\cdot x + d = 0{,}0200\cdot x + d$;
$1{,}034 = 0{,}0200\cdot 3 + d \Rightarrow d = 0{,}974$; t: $y = 0{,}0200\cdot x + 0{,}974$; $y(3{,}2) = 1{,}038$

c) Funktion: $y(1) = 0{,}7854$; $y(1{,}2) = 0{,}7300$; $y' = \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\cdot\arctan x$; $y'(1) = -0{,}2854$;
linearisierte Funktion t: $y = y'(1)\cdot x + d = -0{,}2854\cdot x + d$;
$0{,}7854= -0{,}2854\cdot 1 + d \Rightarrow d = 1{,}0708$; t: $y = -0{,}2854\cdot x + 1{,}0708$; $y(1{,}2) = 0{,}7283$

d) Funktion: $y(2) = 0{,}2273$; $y(2{,}2) = 0{,}1837$; $y' = \frac{\cos x}{2x}-\frac{\sin x}{2x^2}$; $y'(2) = -0{,}2177$;
linearisierte Funktion t: $y = y'(2)\cdot x + d = -0{,}2177\cdot x + d$;
$0{,}2273 = -0{,}2177\cdot 2 + d \Rightarrow d = 0{,}6627$; t: $y = -0{,}2177\cdot x + 0{,}6627$; $y(2{,}2) = 0{,}1838$

e) Funktion: $y(1) = 1{,}5$; $y(1{,}2) = 1{,}689$; $y' = \frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$; $y'(1) = 1$;
linearisierte Funktion t: $y = y'(1)\cdot x + d = \cdot x + d$; $1{,}5 = 1+ d \Rightarrow d = 0{,}5$;
t: $y = x + 0{,}5$; $y(1{,}2) = 1{,}700$

f) Funktion: $y(2) = 0{,}2963$; $y(2{,}2) = 0{,}2221$; $y' = -\frac{1}{12}\cdot\frac{x^6+8x^4+28x^3+3x^2-16x-12}{(x^3+1)^2}$;
$y'(2) = -0{,}3951$ linearisierte Funktion t: $y = y'(2)\cdot x + d = -0{,}3951\cdot x + d$;
$0{,}2963 = -0{,}3951\cdot 2 + d \Rightarrow d = 1{,}086$; t: $y = -0{,}3951\cdot x + 1{,}086$; $y(2{,}2) = 0{,}2173$

4.40 a) $y(1)=e\,;y'=e^x\left(1+x\right)\Rightarrow\quad y'(1)=2\cdot e=k\qquad y=k\cdot x+d\quad\Rightarrow d=-e$
Tangente t: $y=2\cdot e\cdot x-e=e\cdot(2x-1)\approx 5{,}437\cdot x-2{,}718$

b) $y'=0\ \rightarrow e^x\left(1+x\right)=0\rightarrow$ ja, für $x_0=-1\,;y(-1)=-1/e$; Tangente $t:y=-1/e$

4.41 a) $x_1=-2:y(-2)\approx-3{,}637$; $x_2=0{,}5:y(0{,}5)\approx 0{,}120$
$y'=x^2\cdot\cos x+2x\cdot\sin x$; $y'(-2)\approx 1{,}973=k_1$; $y'(0{,}5)\approx 0{,}699=k_2$
$y=k\cdot x+d\quad\rightarrow d_1\approx 0{,}308$; $d_2\approx-0{,}230$
Tangenten t_1: $y=1{,}973\cdot x+0{,}308$; t_2: $y=0{,}699\cdot x-0{,}230$

b) $\tan\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=-0{,}535\Rightarrow\varphi^*=-28{,}2°$; $\varphi=\varphi^*+180°=151{,}8°$ bzw. supplementär $28{,}2°$

4.42 a) $y' = \dfrac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$ oder nach Multiplikation mit dem Nenner ($\neq 0$): $-x^2 - 2x + 1 = 0$;

Lösungen: $x_1 = -2{,}414$ und $x_2 = 0{,}414$; $y(x_1) = -0{,}207$; $y(x_2) = 1{,}207$;
P(−2,414/−0,207) und Q(0,414/1,207)

b) Nullstelle: $y = \dfrac{x+1}{x^2+1} = 0$ oder nach Multiplikation mit dem Nenner ($\neq 0$): $x + 1 = 0 \Rightarrow$
$x_0 = -1$; $k = y'(-1) = 0{,}5$

4.43 a) $y' = 5\cdot(3x-5)^4\cdot 3 = 15\cdot(3x-5)^4$ b) $y' = 7\cdot\left(x^2+1\right)^6\cdot 2x = 14x\cdot\left(x^2+1\right)^6$

c) $y' = 3\cdot(2-x)^2\cdot(-1) = -3\cdot(2-x)^2$ d) $y' = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot(2x+3)^3\cdot 2 = 4\cdot(2x+3)^3$

e) $y' = \dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot x - 3\right)^2 = \dfrac{3}{8}\cdot(x-6)^2$ f) $y' = \dfrac{2}{2\cdot\sqrt{2x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

g) $y' = \dfrac{1}{3}\cdot\left(x^4+2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3 = \dfrac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^4+2\right)^2}}$ h) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{-2}{2\cdot\sqrt{-2x+5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{15-6x}}$

4.44 a) $y' = 2\cdot e^{2x}$ b) $y' = -4\cdot e^{-2x}$ c) $y' = -x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ d) $y' = 2\cdot e^{2x}$ e) $y' = 12x^2\cdot 2^{x^3}\cdot\ln 2$

f) $y' = \dfrac{2}{3}\cdot 4^{\frac{2x-1}{3}}\cdot\ln 4$ g) $y' = -\sin x\cdot e^{\cos x}$ h) $y' = \dfrac{x-(x-1)}{x^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x}} = \dfrac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{x-1}{x}}$

4.45 a) $y' = \dfrac{2}{2x+1}$ b) $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ c) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$ d) $y' = \dfrac{2}{\ln 10}\cdot\dfrac{x}{x^2+1}$

e) $y' = \dfrac{1}{2\cdot x}$ f) $y = e^{\ln x} = x$; $y' = 1$ g) $y' = -\dfrac{1}{x\cdot\ln 10}$ h) $y' = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}$

4.46 a) $y' = 2\cdot\cos(2x)$ b) $y' = -3\cdot\sin(3x-1) = 3\cdot\sin(1-3x)$ c) $y' = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

d) $y' = -\dfrac{1}{x^2\cdot\cos^2(1/x)} = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(1+\tan^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ e) $y' = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}$

f) $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ g) $y' = -\dfrac{1}{x^2\cdot\left(1+1/x^2\right)} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ h) $y' = -3\cdot\cosh(3x)$

4.47 a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^t + e^{-t}\right) = \cosh t$ b) $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{e^u\cdot\left(e^u+e^{-u}\right) - e^u\cdot\left(e^u-e^{-u}\right)}{\left(e^u+e^{-u}\right)^2} = \dfrac{2}{\left(e^u+e^{-u}\right)^2} = \dfrac{2\cdot e^{2u}}{\left(1+2\cdot e^{2u}\right)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1-t}{1+t}\cdot\dfrac{(1-t)-(1+t)\cdot(-1)}{(1-t)^2} = \dfrac{2}{1-t^2}$ d) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\dfrac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2}}{2\cdot\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}} = \dfrac{1}{(t+1)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{t+1}{t-1}}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1+\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} = -\dfrac{1}{x^2+1}$ f) $y' = 5\cdot\left[-e^{-t} - (1-t)\cdot e^{-t}\right] = 5\cdot e^{-t}\cdot(t-2)$ g) $y = 2$; $\dfrac{dy}{dt} = 0$

h) $y = \dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{1-e^{-2t}}$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(-e^{-t}-3\cdot e^{-3t})\cdot(1-e^{-2t}) - (e^{-t}+e^{-3t})\cdot 2e^{-2t}}{(1-e^{-2t})^2} = \dfrac{e^{-5t}-4e^{-3t}-e^{-t}}{(1-e^{-2t})^2} = \dfrac{e^{-t}-4e^{t}-e^{3t}}{(e^{2t}-1)^2}$

4.48 a) $y'=\dfrac{\frac{2x}{x^2}\cdot e^x-\ln x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{2-x\cdot\ln x^2}{x\cdot e^x}$ b) $y'=2\cdot\dfrac{x}{1+e^x}\cdot\dfrac{1+e^x-x\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\dfrac{2x\cdot\left(1+e^x-x\cdot e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$

c) $\dfrac{dy}{dz}=4\cdot\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^3\cdot\dfrac{1+z-z}{(1+z)^2}=\dfrac{4\cdot z^3}{(1+z)^5}$ d) $\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1-s}{s^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{-s^2-(1-s)\cdot 2s}{s^4}=\dfrac{s-2}{3\cdot s\cdot\sqrt[3]{s^2\cdot(1-s)^2}}$

e) $y'=\dfrac{2\cdot e^{2x}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\cdot e^{2x}\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{e^{4x}}=2\cdot e^{-2x}\cdot\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

f) $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(e^{-3x+1}-3\cdot x\cdot e^{-3x+1}\right)\cdot(x+1)-x\cdot e^{-3x+1}}{(x+1)^2}=\dfrac{e^{-3x+1}\cdot\left(-3x^2-3x+1\right)}{2\cdot(x+1)^2}$

4.49 a) $y'=2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}=x\cdot(2-x)\cdot e^{-x}$ b) $\dfrac{dy}{dt}=-e^{-2t}-2\cdot(3-t)\cdot e^{-2t}=(2t-7)\cdot e^{-2t}$

c) $y'=(2x-3)\cdot e^{-2x}-2\cdot(x^2-3x)\cdot e^{-2x}=(-2x^2+8x-3)\cdot e^{-2x}$

d) $y'=2\cdot\ln(2x+1)\cdot\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{4\cdot\ln(2x+1)}{2x+1}$

4.50 a) $y'=2x\cdot\cos(2x)-2x^2\cdot\sin(2x)=2x\cdot(\cos(2x)-x\cdot\sin(2x))$

b) $y'=2\cdot\cos^2(2x)-2\cdot\sin^2(2x)=2\cdot\cos(4x)$ c) $y'=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

d) $y'=\dfrac{e^{2x}\cdot\cos x-2\cdot e^{2x}\cdot\sin x}{e^{4x}}=e^{-2x}\cdot(\cos x-2\sin x)$

e) $\dfrac{dy}{dt}=3\cdot\left[-\dfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin(2t)+2\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos(2t)\right]=\dfrac{3\cdot e^{-\frac{t}{2}}}{2}\cdot[4\cdot\cos(2t)-\sin(2t)]$

f) $y'=3\cdot x^2\cdot\sin^2 x+2\cdot x^3\cdot\sin x\cdot\cos x=x^2\cdot\sin x\cdot(3\sin x+2x\cdot\cos x)$

4.51 a) $\dfrac{df(t)}{dt}=\dfrac{2t\cdot 3^{r\cdot s}\cdot(1+r\cdot s\cdot t)-t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot r\cdot s}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}=\dfrac{t\cdot 3^{r\cdot s}\cdot(2+r\cdot s\cdot t)}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}$

b) $\dfrac{df(r)}{dr}=\dfrac{s\cdot t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot\ln 3\cdot(1+r\cdot s\cdot t)-t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot s\cdot t}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}=\dfrac{s\cdot t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot(\ln 3-t+r\cdot s\cdot t\cdot\ln 3)}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}$

c) $\dfrac{df(s)}{ds}=\dfrac{r\cdot t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot\ln 3\cdot(1+r\cdot s\cdot t)-t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot r\cdot t}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}=\dfrac{r\cdot t^2\cdot 3^{r\cdot s}\cdot(\ln 3-t+r\cdot s\cdot t\cdot\ln 3)}{(1+r\cdot s\cdot t)^2}$

4.52 a) $y=\operatorname{arsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $z=x+\sqrt{x^2+1}$; $\dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) $y=\operatorname{artanh}x=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $y=\ln z$; $z=\sqrt{u}$; $u=\dfrac{1+x}{1-x}$; $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$;

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\cdot\sqrt{1+x}}$$

$$y'=\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\cdot\sqrt{1+x}}=\frac{1}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

4.53 a) $\frac{dy}{dt} = r\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)$ b) $\frac{df}{dt} = -2\cdot\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\frac{di}{dt} = \omega\cdot\hat{I}\cdot\cos(\omega t+\phi)$

d) $\frac{du}{dt} = \omega\cdot\hat{U}\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$ e) $\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$ f) $\frac{dI}{dx} = -\mu\cdot I_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$

g) $\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ h) $\frac{dm}{dt} = c\cdot S\cdot e^{-c\cdot t}$ i) $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\vartheta_0-\vartheta_K}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

j) $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{k}\cdot\frac{k\cdot\omega}{k\omega t+1} = \frac{\omega}{k\omega t+1}$ k) $\frac{dv}{dt} = v_S\cdot\frac{g}{v_S}\cdot\frac{1}{\cosh^2\frac{g\cdot t}{v_S}} = \frac{g}{\cosh^2\frac{g\cdot t}{v_S}}$

l) $\frac{dv}{ds} = v_S\cdot\frac{2k}{m}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}} = \frac{k\cdot v_S\cdot k\cdot e^{-\frac{2ks}{m}}}{m\cdot\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}$

4.54 a) $\frac{dy}{dt} = -A\cdot B\cdot e^{-B\cdot t}$ b) $\frac{dy}{dt} = -A\cdot B\cdot e^{-B\cdot t}$ c) $\frac{dy}{dt} = A\cdot B\cdot e^{-B\cdot t}$ d) $\frac{dy}{dt} = -A\cdot C\cdot e^{-C\cdot t} - B\cdot D\cdot e^{-D\cdot t}$

e) $\frac{dy}{dt} = B\cdot e^{-C\cdot t} - C\cdot(A+B\cdot t)\cdot e^{-C\cdot t} = (B-A\cdot C-B\cdot C\cdot t)\cdot e^{-C\cdot t}$

f) $y' = -2\cdot A\cdot B\cdot(x-C)\cdot e^{-B\cdot(x-C)^2}$

4.55 $\frac{dy}{dt} = y' = \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}}$;

Tangente an der Stelle $t = \tau = 2$: $y(2) = 1{,}896$; $y'(2) = 0{,}5518$; $d = 0{,}7927$; $y = 0{,}5518\cdot t + 0{,}7927$;
$t = 2\tau = 4$: $y = 0{,}5518\cdot 4 + 0{,}7927 = 3$;
Tangente an der Stelle $t = 2\tau = 4$: $y(4) = 2{,}5940$; $y'(4) = 0{,}2030$; $d = 1{,}7820$;
$y = 0{,}2030\cdot t + 1{,}7820$; $t = 3\tau = 6$: $y = 0{,}2030\cdot 6 + 1{,}7820 = 3$

4.56 $\frac{dR}{dt} = -\frac{b}{T}\cdot\left(\frac{t}{T}\right)^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$; $\lambda(t) = e^{\left(\frac{t}{T}\right)^b}\cdot\frac{b}{T}\cdot\left(\frac{t}{T}\right)^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} = \frac{b}{T}\cdot\left(\frac{t}{T}\right)^{b-1}$

4.57 a) $y(1) = 0{,}5$; $y(1{,}5) = 0{,}554$; $y' = \frac{2}{(x+1)^2} - 2^{-x}\cdot\ln 2$; $y'(1) = 0{,}153$; $d = 0{,}347$

Tangente: $y = 0{,}153\cdot x + 0{,}347$ $\quad y(1{,}5) = 0{,}577$

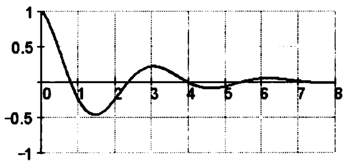
b) $y(0) = 1$; $y(0{,}5) = 0{,}425$;

$$y' = \frac{\left(2\cdot 3^{-x} - (2x+1)\cdot 3^{-x}\cdot\ln 3\right)\cdot e^{2x} - 2\cdot(2x+1)\cdot 3^{-x}\cdot e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2\cdot 3^{-x}\cdot\left(1-(2x+1)\cdot(1+\ln 3)\right)}{e^{2x}};$$

$y'(0) = -1{,}099$; $d = 1$; Tangente: $y = -1{,}099\cdot x + 1$ $\quad y(0{,}5) = 0{,}451$

4.58 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos(2t) - 2\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin(2t) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\left(\cos(2t)+4\cdot\sin(2t)\right) = 0$. Dieses Produkt ist nur null, wenn der Klammerausdruck null ist: $\cos(2t) + 4\cdot\sin(2t) = 0$ oder nach Division durch $\cos(2t)$ und Umformung: $\tan(2t) = -1/4$

$\Rightarrow$ $2t = -0{,}245+\pi = 2{,}897$; $2{,}897+\pi = 6{,}038$;
$6{,}038+\pi = 9{,}180$; $9{,}180+\pi = 12{,}321$;
$t_1 = 2{,}897/2 = 1{,}448$; $y(t_1) = -0{,}470$; Tangente: $y = -0{,}470$
$t_2 = 6{,}038/2 = 3{,}019$; $y(t_2) = 0{,}214$; Tangente: $y = 0{,}214$;
$t_3 = 9{,}180/2 = 4{,}590$; $y(t_2) = -0{,}098$; Tangente: $y = -0{,}098$;
$t_4 = 12{,}321/2 = 6{,}161$; $y(t_2) = 0{,}045$; Tangente: $y = 0{,}045$;



4.59 a) $4+2y'=0 \;\Rightarrow\; y'=-2;\; y'(3)=-2$ b) $2y'-2x=0 \;\Rightarrow\; y'=x;\; y'(1)=1$

c) $2x+2-3y^2\cdot y'=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{2x+2}{3y^2};\; y(1)=\sqrt[3]{2};\; y'(1)=0{,}840$

d) $\frac{y'}{2\cdot\sqrt{y}}-1=0 \;\Rightarrow\; y'=2\cdot\sqrt{y};\; y(0)=0;\; y'(0)=0$

e) $y^3+3x\cdot y^2\cdot y'=1 \;\Rightarrow\; y'=\frac{1-y^3}{3x\cdot y^2};\; y(0{,}5)=\sqrt[3]{5};\; y'(0{,}5)=-0{,}912$

f) $\frac{1}{3}\cdot(2y-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2y'-1=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(2y-1)^2};\; y(0)=1;\; y'(0)=\frac{3}{2}$

g) $\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=1 \;\Rightarrow\; y'=\frac{y-y^2}{x};\, y(2)=2;\; y'(2)=-1$

h) $\frac{y^3-3x\cdot y^2\cdot y'}{y^6}-1=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{y-y^4}{3x};\, y(1)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\; y'(1)=0{,}1323$

4.60 a) $\frac{x}{8}-\frac{y}{18}\cdot y'=0 \to y'=\frac{9}{4}\cdot\frac{x}{y}$ b) $\frac{x}{32}+\frac{y}{18}\cdot y'=0 \to y'=-\frac{9}{16}\cdot\frac{x}{y}$

c) $2x+10+2y\cdot y'=0 \to y'=-\frac{x+5}{y}$ d) $4y\cdot y'=3 \to y'=\frac{3}{4y}$

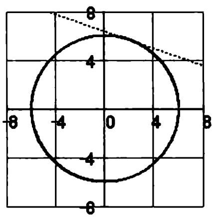
4.61 a) $y(2)=5{,}657;\; 2x+2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y};\; y'(-2)=0{,}354;\; d=6{,}364;\; t:\; y=0{,}354\cdot x+6{,}364$

b) $y(1)=1;\; 2y\cdot y'=3x^2 \;\Rightarrow\; y'=\frac{3x^2}{2y};\quad y'(1)=\frac{3}{2};\quad d=-\frac{1}{2};\; t:.\, y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$

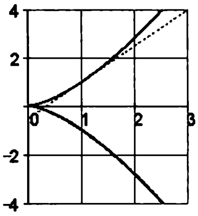
c) $y(2)=1{,}4907;\; \frac{2x}{9}+\frac{y}{2}\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{4x}{9y};\, y'(2)=-0{,}596;\, d=2{,}683;\; t:\; y=-0{,}596\cdot x+2{,}683$

d) $y(0{,}5)=0{,}225;\; \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{y}}\cdot y'=0 \to y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}};$

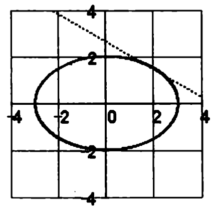
$y'(0{,}5)=-0{,}766;\; d=0{,}608;\; t:\; y=-0{,}766\cdot x+0{,}608$



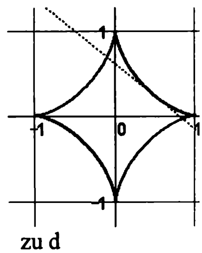
zu a)



zu b)



zu c)



zu d

4.62 a) $x=y^3;\quad 1=3y^2\cdot y' \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

b) $x=\cos y;\quad 1=(-\sin y)\cdot y' \;\Rightarrow\; y'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $x=\tan y;\quad 1=(1+\tan^2 y)\cdot y' \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

d) $x=\cosh y;\quad 1=(\sinh y)\cdot y' \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{\sinh y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

e) $x=\tanh y;\quad 1=(1-\tanh^2 y)\cdot y' \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{1-\tanh^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$

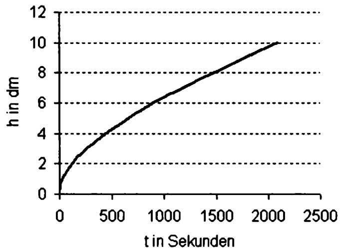
4.63 $t = 10\pi \cdot h^2 - \frac{\pi \cdot h^3}{3}$; für $t > 0$ ist h stets positiv;

$1 = 20\pi \cdot h \cdot h' - \pi \cdot h^2 \cdot h'$; $\Rightarrow$ $h' = \frac{1}{\pi \cdot h \cdot (20-h)}$

wie zu erwarten, ist h' stets positiv (weil $h > 0$ und $h \le 10$);

für $h \to 0$ geht der Nenner $\frac{1}{\pi \cdot h \cdot (20-h)}$ gegen null und daher der Bruch gegen unendlich: $\lim\limits_{h \to 0+} h'(t) = \infty$.

Der Graph besitzt daher bei $x = 0$ (rechtsseitig) eine senkrechte Tangente.



4.64 a) $\ln y = x \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$; $y' = y \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1)$; $y'(2) = 6{,}773$

b) $\ln y = \ln 2 + (2x+1) \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x + \frac{2x+1}{x}$; $y' = 2x^{2x+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + \frac{2x+1}{x}\right)$; $y'(2) = 248{,}72$

c) $\ln y = x \cdot \cos x \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x - x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x$;

$y' = x^{x \cdot \cos x} \cdot \left((1 + \ln x) \cdot \cos x \cdot \ln x - x \cdot \ln x \cdot \sin x\right)$; $y'(2) = -1{,}104$

d) $\ln y = 4x \cdot \ln\left(3 - \frac{2}{x}\right)$; $\frac{y'}{y} = 4 \cdot \ln\left(3 - \frac{2}{x}\right) + \frac{8}{3x-2}$

$y' = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^{4x} \cdot \left[4 \cdot \ln\left(3 - \frac{2}{x}\right) + \frac{8}{3x-2}\right]$; $y'(2) = 1221{,}8$

e) $\ln y = -(3x+1) \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = -\left(3 \cdot \ln x + \frac{3x+1}{x}\right)$; $y' = -\frac{1}{x^{3x+1}} \cdot \left(3 \cdot \ln x + \frac{3x+1}{x}\right)$; $y'(2) = -0{,}0436$

f) $\ln y = \frac{1}{2x} \cdot \ln(x+1)$; $\frac{y'}{y} = -\frac{\ln(x+1)}{2x^2} + \frac{1}{2x \cdot (x+1)}$; $y' = \sqrt[2x]{x+1} \cdot \left[\frac{1}{2x \cdot (x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{2x^2}\right]$; $y'(2) = -0{,}071$

g) $\ln y = -x \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = -(\ln x + 1)$; $y' = -x^x \cdot (\ln x + 1)$; $y'(2) = -0{,}423$

h) $\ln y = 2x \cdot \ln(\sin x)$; $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \left(\ln(\sin x) + \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}\right)$;

$y' = 2 \cdot (\sin x)^{2x} \cdot \left(\ln(\sin x) + \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}\right)$; $y'(2) = -1{,}381$

4.65 a) $y(1{,}5) = 5{,}063$; $\ln y = (2x+1) \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x + \frac{2x+1}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = x^{2x+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + \frac{2x+1}{x}\right)$

$y' = x^{2x} \cdot (2x \cdot \ln x + 2x + 1)$; $y'(1{,}5) = 17{,}61$; $d = -21{,}35$; t: $y = 17{,}61 \cdot x - 21{,}35$

b) $y(3) = 1{,}592$; $\ln y = x \cdot \sin x \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = \sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x$

$y' = x^{x \cdot \sin x} \cdot (\sin x \cdot \ln x + x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sin x)$;

$y'(3) = -4{,}72$; $d = 15{,}76$; t: $y = -4{,}724 \cdot x + 15{,}76$

c) $y(1) = 16$; $\ln y = 2x \cdot \ln\frac{x+3}{x}$; $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \left(\ln\frac{x+3}{x} + x \cdot \frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-(x+3)}{x^2}\right) = 2 \cdot \left(\ln\frac{x+3}{x} - \frac{3}{x+3}\right)$

$y' = 2 \cdot \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} \cdot \left(\ln\frac{x+3}{x} - \frac{3}{x+3}\right)$ $y'(1) = 20{,}36$; $d = -4{,}36$; t: $y = 20{,}36 \cdot x - 4{,}36$

4.66 $\ln y = n \cdot \ln x$; $\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$ $\Rightarrow$ $y' = x^n \cdot \frac{n}{x} = n \cdot x^{n-1}$

4.67 a) $y' = 2x + 5$; $y'' = 2$; $y''' = 0$
b) $y' = 4x^3 - 9x^2 - 6x + 3$; $y'' = 12x^2 - 18x - 6$; $y''' = 24x - 18$; $y^{(4)} = 24$; $y^{(5)} = 0$
c) $y' = -24x^5 + 9x^2 - 2/3$; $y'' = -120x^4 + 18x$; $y''' = -480x^3 + 18$; $y^{(4)} = -1440x^2$; $y^{(5)} = -2880x$;
$y^{(6)} = -2880$; $y^{(7)} = 0$

4.68 a) $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$; $y''(2) = \frac{1}{4}$ b) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $y'' = \frac{-1}{(2x+1)^{3/2}}$; $y''(2) = -0{,}0894$

c) $y' = \frac{6}{(1-3x)^2}$; $y'' = \frac{36}{(1-3x)^3}$; $y''(2) = -\frac{36}{125} = -0{,}288$

d) $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} = \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2}$; $y''(2) = -\frac{1}{4}$

e) $y' = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot x)$; $y'' = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot x)$; $y''(2) = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(2\omega)$

f) $y' = -2 \cdot e^{-2x}$; $y'' = 4 \cdot e^{-2x}$; $y''(2) = 4 \cdot e^{-4} \approx 0{,}0733$

g) $y' = -e^{-x} + 2 \cdot e^{-2x}$; $y'' = e^{-x} - 4 \cdot e^{-2x}$; $y''(2) = 0{,}0621$

h) $y' = \frac{2 \cdot (1+x) - (1+2x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$; $y'' = -\frac{2}{(1+x)^3}$; $y''(2) = -\frac{2}{27} = -0{,}0741$

i) $y' = \frac{2-x^2-(1+x)\cdot(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{2+2x+x^2}{(2-x^2)^2}$

$y'' = \frac{(2+2x)\cdot(2-x^2)^2-(2+2x+x^2)\cdot 2\cdot(2-x^2)\cdot(-2x)}{(2-x^2)^4} = \frac{2x^3+6x^2+12x+4}{(2-x^2)^3}$; $y''(2) = -\frac{17}{2} = -8{,}5$

j) $y = \frac{2x^2-3x+1}{(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x-1}$; $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$; $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$; $y''(2) = 2$

k) $y' = \frac{2a \cdot x \cdot (a \cdot x + 1) - a^2 \cdot x^2}{(a \cdot x + 1)^2} = \frac{a^2 \cdot x^2 + 2ax}{(a \cdot x + 1)^2}$

$y'' = \frac{(2a^2x + 2a) \cdot (a \cdot x + 1)^2 - (a^2 \cdot x^2 + 2ax) \cdot 2 \cdot (a \cdot x + 1) \cdot a}{(a \cdot x + 1)^4} = \frac{2a}{(a \cdot x + 1)^3}$; $y''(2) = \frac{2a}{(2a+1)^3}$

l) $y' = \frac{-1}{2x^2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}}$ $y'' = \frac{4x-3}{4x^3 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}}$; $y''(2) = \frac{11 \cdot \sqrt{6}}{288} = 0{,}0936$

m) $y' = \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) \cdot (x^2-1) - x \cdot \sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x \cdot (x^2-1) - 4 \cdot x^3}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x - 4 \cdot x^3}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x^2-1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} \cdot (x^2+3)}{(x^2-1)^2}$

$y'' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x^2+3}{2 \cdot \sqrt{x}} + 2x \cdot \sqrt{x}\right) \cdot (x^2-1)^2 - \left(\sqrt{x} \cdot (x^2+3)\right) \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{5x^4 - 2x^2 - 3 - 8x^4 - 24x^2}{\sqrt{x} \cdot (x^2-1)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^4 + 26x^2 + 3}{\sqrt{x} \cdot (x^2-1)^3}$; $y''(2) = \frac{155 \cdot \sqrt{2}}{16} = 1{,}015$

n) $= -\frac{x}{2} \cdot e^{-x^2/4}$; $y'' = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x^2/4} - \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x^2/4}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-x^2/4} \cdot (x^2 - 2)$; $y''(2) = 0{,}184$

o) $y' = (2x + 1) \cdot e^{2x}$; $y'' = (4x + 4) \cdot e^{2x}$ $y''(2) = 12 \cdot e^4 = 655{,}2$

p) $y' = \frac{\cos x \cdot e^{2x} - \sin x \cdot 2 \cdot e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{\cos x - 2 \cdot \sin x}{e^{2x}}$; $y'' = \frac{3 \sin x - 4 \cdot \cos x}{e^{2x}}$; $y''(2) = 0{,}0805$

q) $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\sin x + \sqrt{x}\cdot\cos x$; $y'' = -\frac{1}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}\cdot\sin x + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\cos x + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\cos x - \sqrt{x}\cdot\sin x =$

$= -\left(\frac{1}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x$; $y''(2) = -1{,}661$

r) $y' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\cdot\sin(2x)+\cos(2x)}{x^2}$;

$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot\sin(2x)+4x\cdot\cos(2x)-2\sin(2x))\cdot x^2 - [2x\cdot(2x\cdot\sin(2x)+\cos(2x))]}{x^4} =$

$= \frac{2x\cdot\sin(2x)-(2x^2-1)\cdot\cos(2x)}{x^3}$; $y''(2) = 0{,}1935$

s) $y' = \frac{3\cos(3x)\cdot e^{0,5x} - 0{,}5\cdot e^{0,5x}\cdot\sin(3x)}{e^x} = \frac{3\cos(3x)-0{,}5\cdot\sin(3x)}{e^{0,5\cdot x}}$

$y'' = \frac{(-9\cdot\sin(3x)-1{,}5\cdot\cos(3x))\cdot e^{0,5\cdot x} - 0{,}5\cdot(3\cos(3x)-0{,}5\cdot\sin(3x))\cdot e^{0,5x}}{e^x} =$

$= -\frac{8{,}75\cdot\sin(3x)+3\cdot\cos(3x)}{e^{0,5\cdot x}}$; $y''(2) = -0{,}160$

t) $y' = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$; $y'' = 3\cdot(2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x - \sin^3 x)$; $y''(2) = -1{,}311$

4.69 a) $\frac{df(t)}{dt} = \frac{(t-3)-(t+3)}{(t-3)^2} = -\frac{6}{(t-3)^2}$; $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{12}{(t-3)^3}$; $\frac{d^3f(t)}{dt^3} = -\frac{36}{(t-3)^4}$

b) $y' = \frac{(3x^2+2x-1)\cdot(x+1)-(x^3+x^2-x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+4x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

$y'' = \frac{(6x^2+8x+2)\cdot(x+1)^2-(2x^3+4x^2+2x-2)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x^3+6x^2+6x+6}{(x+1)^3}$

$y''' = \frac{(6x^2+12x+6)\cdot(x+1)^3-(2x^3+6x^2+6x+6)\cdot 3\cdot(x+1)^2}{(x+1)^6} = -\frac{12}{(x+1)^4}$

c) $y' = -2\cdot x\cdot e^{-x^2}$; $y'' = -2\cdot\left[e^{-x^2} + x\cdot(-2\cdot x\cdot e^{-x^2})\right] = -2\cdot(1-2x^2)\cdot e^{-x^2}$

$y''' = -2\cdot\left[-4x\cdot e^{-x^2} + (1-2x^2)\cdot(-2\cdot x\cdot e^{-x^2})\right] = 4x\cdot(3-2x^2)\cdot e^{-x^2}$

d) $y' = -2\cdot\sin x\cdot\cos x = -\sin(2x)$; $y'' = -2\cdot\cos(2x)$; $y''' = 4\cdot\sin(2x)$

e) $\frac{df(t)}{dt} = 1 - e^{-t} + t\cdot e^{-t}$; $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = (2-t)\cdot e^{-t}$; $\frac{d^3f(t)}{dt^3} = (t-3)\cdot e^{-t}$

f) $y' = 1+\tan^2 x$; $y'' = 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x)$;

$y''' = 2\cdot\left[(1+\tan^2 x)^2 + \tan x\cdot 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x)\right] = 2 + 8\cdot\tan^2 x + 6\cdot\tan^4 x$

g) $\frac{df(u)}{du} = 1 + \ln u$; $\frac{d^2f(u)}{du^2} = \frac{1}{u}$; $\frac{d^3f(u)}{du^3} = -\frac{1}{u^2}$

h) $y' = \frac{\ln(3x)}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{3\cdot\sqrt{x}}{3x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2+\ln(3x)}{\sqrt{x}}$; $y'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2+\ln(3x)}{2\cdot\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(3x)}{x\cdot\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(3x)}{x\cdot\sqrt{x}}$

$y''' = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x^{3/2} - \ln(3x)\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}}{x^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\cdot\ln(3x)-2}{x^{5/2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\cdot\ln(3x)-2}{x^2\cdot\sqrt{x}}$

4.70 a) $y = \sin(2x+\pi) = -\sin(2x)$; $y' = -2\cdot\cos(2x)$; $y'(\pi) = -2$; $y'' = 4\cdot\sin(2x)$; $y''(\pi/2) = 0$
b) $y' = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin(2x)$; $y'(\pi) = 0$; $y'' = 2\cdot\cos(2x)$; $y''(\pi/2) = -2$
c) $y' = 2\cdot(\sin x + \cos x)\cdot(\cos x - \sin x) = 2\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cdot\cos(2x)$; $y'(\pi) = 2$;
$y'' = -4\cdot\sin(2x)$; $y''(\pi/2) = 0$
d) $y' = \cos(2x) - 2x\cdot\sin(2x)$; $y'(\pi) = 1$;
$y'' = -\sin(2x) - 2\cdot\sin(2x) - 4x\cdot\cos(2x) = -3\cdot\sin(2x) - 4x\cdot\cos(2x)$; $y''(\pi/2) = 2\pi$

4.71 a) $y = \frac{1}{t}\cdot(\ln t + \ln x) = \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t}\cdot\ln x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t\cdot x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t\cdot x^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{t}\cdot t - 1\cdot\ln t}{t^2} - \frac{\ln x}{t^2} = \frac{1-\ln t-\ln x}{t^2} = \frac{1-\ln(t\cdot x)}{t^2};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1-\ln t-\ln x}{t^2} = \frac{-\frac{1}{t}\cdot t^2-(1-\ln t-\ln x)\cdot 2t}{t^4} = \frac{2\ln(t\cdot x)-3}{t^3}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot(x+t)(x-t)-(x+t)^2}{(x-t)^2} = \frac{x^2-2tx-3t^2}{(x-t)^2};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8t^2}{(x-t)^3};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\cdot(x+t)(x-t)-(x+t)^2(-1)}{(x-t)^2} = \frac{3x^2+2tx-t^2}{(x-t)^2};\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{8x^2}{(x-t)^3}$$

c) $$\frac{dy}{dx} = \frac{t^x\cdot\ln t\cdot x^t - t\cdot x^{t-1}\cdot t^x}{x^{2t}} = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left(\ln t - \frac{t}{x}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left(\ln t-\frac{t}{x}\right)^2 + \frac{t^x}{x^t}\cdot\frac{t}{x^2} = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left[\left(\ln t-\frac{t}{x}\right)^2+\frac{t}{x^2}\right] = \frac{t^x}{x^t}\cdot\frac{x^2\ln^2 t-2\,t\,x\ln x+t\,(t+1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x\cdot t^{x-1}\cdot x^t - x^t\cdot\ln x\cdot x^t}{x^{2t}} = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left(\frac{x}{t}-\ln x\right);$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left(\frac{x}{t}-\ln x\right)^2 + \frac{t^x}{x^t}\cdot\left(-\frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^x}{x^t}\cdot\left[\left(\frac{x}{t}-\ln x\right)^2-\frac{x}{t^2}\right] = \frac{t^x}{x^t}\cdot\frac{t^2\ln^2 x-2\,t\,x\ln x+x\,(x-1)}{t^2}$$

d) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\cdot t\cdot e^{t\cdot x^2}\cdot t^2\cdot x - e^{t\cdot x^2}\cdot t^2}{t^4\cdot x^2} = \frac{e^{t\cdot x^2}\cdot(2t\cdot x^2-1)}{t^2\cdot x^2};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\cdot e^{t\cdot x^2}\cdot(2t^2\cdot x^4 - t\cdot x^2+1)}{t^2\cdot x^3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x^2\cdot e^{t\cdot x^2}\cdot t^2\cdot x - e^{t\cdot x^2}\cdot 2t\cdot x}{x^2\cdot t^4} = \frac{e^{t\cdot x^2}\cdot(x^2\cdot t-2)}{x\cdot t^3};\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e^{t\cdot x^2}\cdot(x^4\cdot t^2-4\cdot x^2\cdot t+6)}{t^4\cdot x}$$

4.72 a)

$y = a\,x^2 + b\,x + c$	I: $4 = 4a + 2b + c$	$a = 2$ aus III; in I und II einsetzen
$y' = 2a\,x + b$	II: $5 = 4a + b$	usw. $\Rightarrow$
$y'' = 2a$	III: $4 = 2a$	$b = -3$; $c = 2$;
		$y = 2x^2 - 3x + 2$

b) $y' = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/4$; waagrechte Tangente bei $x = 3/4 = 0{,}75$; P(0,75/0,875)

4.73

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$	I: $3a - 2b + c = -3$	$b = 6a + 1$ aus III in I und II
$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$	II: $12a - 4b + c = 5$	einsetzen usw. $\Rightarrow$
$f''(x) = 6a\,x + 2b$	III: $-12a + 2b = 2$	$a = -10/3$; $b = -19$; $c = -31$;
	IV: $d = 1$	$y = -10x^3/3 - 19x^2 - 31x + 1$

4.74 a) Da die 2. Ableitung der Polynomfunktion identisch –1 ist, ist ihr Grad gleich 2:

$y = a x^2 + b x + c$
$y' = 2a x + b$
$y'' = 2a$

$y'(2) = -5$
$y'' = -1$
I: $y'(2) = 2a \cdot 2 + b = -5$
$\underline{\text{II: } y'' = \quad 2a = -1}$
$\Rightarrow a = -1/2;\ b = -3;$
$y = -x^2/2 - 3x + c;$
$y(2) = -4/2 - 3 \cdot 2 + c = c - 8$

Tangente an der Stelle $x = 2$:
$y = k \cdot x + d = -5x + d;$
$P(2/c-8)$ ist Berührpunkt der Tangente:
$c-8 = -5 \cdot 2 + d \Rightarrow d = c + 2;$
daher lautet die Tangente:
$y = -5x + c + 2.$

Vergleich von $y = -5x + c + 2$ mit der gegebenen Tangente $y = -5x + 7$ ergibt $c+2 = 7$ oder $c = 5$. Daher lautet schließlich die Gleichung der gesuchten Funktion: $y = -x^2/2 - 3x + 5$

b) $y = -x^2/2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1{,}36;\ x_2 = -7{,}36;\ y' = -x - 3$
$y'(x_1) = -4{,}36;\ \tan\varphi_1 = -4{,}36 \Rightarrow \varphi_1{}^* = -77{,}1;\ \varphi_1 = \varphi_1{}^* + 180° = 102{,}9°;$
$y'(x_2) = 4{,}36;\ \tan\varphi_2 = 4{,}36 \Rightarrow \varphi_2 = 77{,}1°$

4.75 $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$
$y' = 3a x^2 + 2b x + c$
$y'' = 6a x + 2b$

$x = 0{:}\ y = 1 \Rightarrow d = 1$
$y''(0) = 0{:}\ 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$y'(-1) = 1{:}\ 3a \cdot (-1)^3 + 2b \cdot (-1) + c \cdot (-1) = 1 \Rightarrow c = 1-3a.$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $y = a \cdot x^3 + (1-3a) \cdot x + 1;\ y(-1) = 2a;$
Tangente an der Stelle $x = -1$: $y = k \cdot x + d = x + d$; $P(-1/2a)$ ist Berührpunkt der Tangente:
$2a = 1 \cdot (-1) + d \Rightarrow d = 2a + 1$; daher lautet die Tangente: $y = x + 2a + 1$
Vergleich von $y = x + 2a - 1$ mit der gegebenen Tangente $y = x + 5$ ergibt $2a + 1 = 5$ oder $a = 2$.
Daher lautet schließlich die Gleichung der gesuchten Funktion: $y = 2x^3 - 5x + 1$

4.76 a) $y' = e^{-3x} \cdot (-3 \cdot \sin(4x) + 4 \cdot \cos(4x));\ y'' = e^{-3x} \cdot (-7 \cdot \sin(4x) - 24 \cdot \cos(4x))$

$$e^{-3x} \cdot (-7 \cdot \sin(4x) - 24 \cdot \cos(4x)) + 6 \cdot e^{-3x} \cdot (-3 \cdot \sin(4x) + 4 \cdot \cos(4x)) + 25 \cdot e^{-3x} \cdot \sin(4x) = 0$$

b) $y' = e^{-3x} \cdot (-4 \cdot \sin(4x) - 3 \cdot \cos(4x));\ y'' = e^{-3x} \cdot (24 \cdot \sin(4x) - 7 \cdot \cos(4x))$

$$e^{-3x} \cdot (24 \cdot \sin(4x) - 7 \cdot \cos(4x)) + 6 \cdot e^{-3x} \cdot (-4 \cdot \sin(4x) - 3 \cdot \cos(4x)) + 25 \cdot e^{-3x} \cdot \cos(4x) = 0$$

4.77 a) (1) Grad 2, weil für $y = a \cdot x^2 + bx + c$ gilt: $y''(x) = 2a$, d.h. konstante 2. Ableitung; $y' = 2a \cdot x + b$
(2) Mögliche Vorgangsweise: $y'' = 2a = 2 \Rightarrow a = 1$; $y(0) = c = 4$; $y'(0) = b = -2$;
$y = x^2 - 2x + 4$, Gleichung einer Parabel
Umständlicher ohne Verwendung der Ableitungen; beispielsweise:
I: $y(0) = c = 4$
II: $y(1) = a + b + c = 3 \qquad \Rightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = 4$
$\underline{\text{III: } y(2) = 4a + 2b + c = 4}$
(3) An der Stelle $x = -1$ ist die Tangente waagrecht, also ist dort der Parabelscheitel: $S(1/3)$

b) (1) Grad 2, weil für $y = a \cdot x^2 + bx + c$ gilt: $y''(x) = 2a$, d.h. konstante 2. Ableitung; $y' = 2a \cdot x + b$
(2) Mögliche Vorgangsweise: $y'' = 2a = -2 \Rightarrow a = -1$; $y(0) = c = -15$; $y'(0) = b = -8$;
$y = -x^2 - 8x - 15$, Gleichung einer Parabel
(3) Parabelscheitel $S(-4/1)$, weil an der Stelle $x = -4$ die Tangente waagrecht verläuft

c) (1) Grad 2, weil für $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gilt: $y''(x) = 2a$, d.h. konstante 2. Ableitung; $y' = 2a \cdot x + b$
(2) Mögliche Vorgangsweise: $y'' = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$; $y(0) = c = 1$; $y'(0) = b = 4$;
$y = 4x^2 + 4x + 1$, Gleichung einer Parabel
(3) Parabelscheitel $S(-0{,}5/0)$, weil an der Stelle $x = -0{,}5$ die Tangente waagrecht verläuft

4.78 **a)** (1) Grad 3, weil für $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ gilt: $y'''(x) = 6a$, d.h. konstante dritte Ableitung;
$y' = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c;\ y'' = 6a \cdot x + 2b$
(2) Mögliche Vorgangsweise: $y''' = 6a = -18 \Rightarrow a = -3$; $y(0) = d = 2$
$y'(0) = c = -1;\ y''(0) = 2b = 4 \Rightarrow b = 2;\ y = -3x^3 + 2x^2 - x + 2$
Umständlicher ohne wenigstens teilweiser Verwendung der Ableitungen.

b) (1) Grad 3, weil für $y = a \cdot x^3 + bx^2 + cx + d$ gilt: $y'''(x) = 6a$, d.h. konstante dritte Ableitung;
(2) Mögliche Vorgangsweise: $y''' = 6a = -2{,}4 \Rightarrow a = -0{,}4$; $y(0) = d = -2$;
$y'(0) = c = 3;\ y''(0) = 2b = -4 \Rightarrow b = -2;\ y = -0{,}4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

4.79 a) $f'(x)=6x^2-1$; $f'(2)=23$; $dy=23\cdot dx$ b) $f'(x)=\frac{2}{(1-2x)^2}$; $f'(2)=\frac{2}{9}$; $dy=\frac{2}{9}\cdot dx$

c) $f'(x)=\cos x$; $f'(0)=1$; $dy=dx$ d) $f'(x)=-\sin x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $dy=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot dx$

e) $f'(x)=2\cdot e^{2x}$; $f'(1)=2\cdot e^2$; $dy=2\cdot e^2\cdot dx$; f) $f'(x)=\ln x+1$; $f'(1)=\ln(1)+1=1$; $dy=dx$

4.80 a) $f'(x)=x$; $f'(-1)=-1$;

$dx=2$:	$\Delta y=f(1)-f(-1)=0$;	$dy=-1\cdot 2=-2$
$dx=0{,}01$:	$\Delta y=f(-0{,}9)-f(-1)=-0{,}00995$;	$dy=-1\cdot 0{,}01=-0{,}01$

b) $f'(x)=-e^{-x}$; $f'(0)=-1$;

$dx=0{,}1$:	$\Delta y=f(0{,}1)-f(0)=-0{,}09516$;	$dy=-1\cdot 0{,}1=-0{,}1$
$dx=0{,}01$:	$\Delta y=f(0{,}01)-f(0)=-0{,}00995$;	$dy=-1\cdot 0{,}01=-0{,}01$

c) $f'(x)=\cos x$; $f'(\pi)=-1$;

$dx=\pi/5$:	$\Delta y=f(\pi+\pi/5)-f(\pi)=-0{,}58779$;	$dy=-1\cdot\pi/5=-0{,}62832$
$dx=\pi/20$:	$\Delta y=f(\pi+\pi/20)-f(\pi)=-0{,}15643$;	$dy=-1\cdot\pi/20=-0{,}15708$

d) $f'(x)=1/x$; $f'(2)=0{,}5$;

$dx=-0{,}2$:	$\Delta y=f(1{,}8)-f(2)=-0{,}10536$;	$dy=0{,}5\cdot(-0{,}2)=-0{,}1$
$dx=-0{,}002$:	$\Delta y=f(1{,}998)-f(2)=-0{,}00100$;	$dy=0{,}5\cdot(-0{,}002)=-0{,}001$

e) $f'(x=-2/(x-1)^2$; $f'(-2)=-0{,}22222$;

$dx=0{,}1$:	$\Delta y=f(-1{,}9)-f(-2)=-0{,}02299$;	$dy=-0{,}22222\cdot 0{,}1=-0{,}02222$
$dx=0{,}05$:	$\Delta y=f(-1{,}95)-f(-2)=-0{,}01130$;	$dy=-0{,}22222\cdot 0{,}05=-0{,}01111$

f) $f'(x)=-2\cdot\sin(2x+\pi/3)$; $f'(0)=-1{,}73205$;

$dx=-0{,}2$:	$\Delta y=f(-0{,}2)-f(0)=0{,}29778$;	$dy=-1{,}73205\cdot(-0{,}2)=0{,}34641$;
$dx=-0{,}02$:	$\Delta y=f(-0{,}02)-f(0)=0{,}03423$;	$dy=-1{,}73205\cdot(-0{,}02)=0{,}03464$

4.81 Ja, die linearen Funktionen $y=k\cdot x+d$;
Grund: $\Delta y=f(x_0+dx)-f(x_0)=k\cdot dx$; $dy=f'(x_0)\cdot dx=k\cdot dx$

4.82 $V(d)=\frac{\pi}{6}\cdot d^3$; exakt: $\frac{\pi}{6}\cdot(201^3-200^3)\,\text{mm}^3\approx 63{,}15\,\text{cm}^3$

$V'(d)=\frac{\pi}{2}\cdot d^2$; $V'(200)=62832\ \text{cm}^2$; näherungsweise; $dV=62832\cdot 1\,\text{mm}^3\approx 62{,}83\,\text{cm}^3$

4.83 Stromstärke I:

$I=\frac{U}{75}$ linear in U ("y =k·x + d" mit k = 1/75 und d = 0); daher ist die exakte Änderung gleich der näherungsweisen Änderung durch das Differential von I;

$I'(U)=\frac{1}{75}$; $U_0=230$; $dI=I'(U_0)\cdot dU=\frac{1}{75}\cdot(-5)=-0{,}0667$ A;

prozentuelle Änderung: $I_0=\frac{230}{75}=3{,}0667$ A; $I_0=\frac{dI}{I_0}=\frac{-0{,}0667}{3{,}0667}\approx-0{,}0217=-2{,}17\cdot\frac{1}{100}=-2{,}17\%$

Leistung P:

$P(U)=\frac{U^2}{75}$; $U_0=230$ V; $P_0=P(U_0)=705{,}33$ W; $\Delta P=P(U_0-5)-P(U_0)=-30{,}33$ W;

prozentuelle Änderung exakt: $\frac{\Delta P}{P_0}=\frac{-30{,}33}{705{,}33}=-0{,}0430=-4{,}30\cdot\frac{1}{100}=-4{,}30\%$

$P'(U)=\frac{2U}{75}$; $P'(U_0)=\frac{2\cdot 230}{75}=6{,}133$; $dP=P'(U_0)\cdot dU=6{,}133\cdot(-5)=-30{,}67$ W;

prozentuelle Änderung näherungsweise: $\frac{dP}{P_0}=\frac{-30{,}67}{705{,}33}=-0{,}0435=-4{,}35\cdot\frac{1}{100}=-4{,}35\%$

4.84 Exakt: $C_0 = 5\cdot10^{-6}$ F;
$dC = 0{,}1\cdot10^{-6}$ F: $\Delta T = T(C_0 + 0{,}1\cdot10^{-6}) - T(C_0) = 0{,}0000625$ s $= 0{,}0625$ ms
$dC = 0{,}5\cdot10^{-6}$ F: $\Delta T = T(C_0 + 0{,}5\cdot10^{-6}) - T(C_0) = 0{,}0003067$ s $= 0{,}3067$ ms
Näherungsweise: $T'(C) = \frac{\pi\cdot L}{\sqrt{L\cdot C}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$; $T'(C_0) = \pi\cdot\sqrt{\frac{0{,}2}{C_0}} = 628{,}32$;
$dC = 0{,}1\cdot10^{-6}$ F: $dT = T'(C_0)\cdot dC = 0{,}0000628$ s $= 0{,}0628$ ms
$dC = 0{,}5\cdot10^{-6}$ F: $dT = T'(C_0)\cdot dC = 0{,}0003142$ s $= 0{,}3142$ ms

4.85 $r_0 = 10{,}0$ cm; $|\Delta r| = 0{,}5$ cm
a) $u(r) = 2\pi\, r$; $u_0 = u(r_0) = 62{,}83$ cm^2; $u'(r) = 2\pi$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta u| \approx |du| = |u'(r_0)|\cdot|\Delta r| = 2\pi\cdot 0{,}5 = 3{,}1$ cm;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta u|}{u_0} \approx \frac{|du|}{u_0} = \frac{3{,}1}{62{,}8} = 0{,}05 = 5\%$
b) $A(r) = \pi\, r^2$; $A(r_0) = 314{,}2$ cm^2; $A'(r) = 2\pi\cdot r$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta A| \approx |dA| = |A'(r_0)|\cdot|\Delta r| = 31{,}42$ cm^2;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta A|}{A_0} \approx \frac{|dA|}{A_0} = \frac{31{,}42}{314{,}2} = 0{,}1 = 10\%$

4.86 $a_0 = 2{,}0$ dm; $|\Delta a| = 0{,}5$ cm
a) $O(a) = 6\cdot a^2$; $O_0 = O(a_0) = 24$ dm^2; $O'(a) = 12a$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta O| \approx |dO| = |O'(a_0)|\cdot|\Delta a| = 24\cdot 0{,}05 = 1{,}2$ dm^2;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta O|}{O_0} \approx \frac{|dO|}{O_0} = \frac{1{,}2}{24} = 0{,}05 = 5\%$
b) $V(a) = a^3$; $V_0 = V(a_0) = 8$ dm^3; $V'(a) = 3a^2$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta V| \approx |dV| = |V'(a_0)|\cdot|\Delta a| = 12\cdot 0{,}05 = 0{,}6$ dm^3;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta V|}{V_0} \approx \frac{|dV|}{V_0} = \frac{0{,}6}{8} = 0{,}075 = 7{,}5\%$

4.87 $d_0 = 50{,}0$ cm; $|\Delta a| = 0{,}5$ cm
a) $V(d) = (\pi/6)\cdot d^3$; $V_0 = V(d_0) = 65{,}45$ dm^3; $V'(d) = (\pi/2)\cdot d^2$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta V| \approx |dV| = |V'(d_0)|\cdot|\Delta d| = 39{,}27\cdot 0{,}05 = 2{,}0$ dm^3;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta V|}{V_0} \approx \frac{|dV|}{V_0} = \frac{2{,}0}{65{,}45} = 0{,}03 = 3\%$
b) $O(d) = \pi\cdot d^2$; $O_0 = O(d_0) = 78{,}54$ dm^2; $O'(d) = 2\pi\cdot d$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta O| \approx |dO| = |O'(d_0)|\cdot|\Delta d| = 31{,}4\cdot 0{,}05 = 1{,}6$ dm^2;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta O|}{O_0} \approx \frac{|dO|}{O_0} = \frac{1{,}6}{78{,}54} = 0{,}02 = 2\%$

4.88 $h_0 = 50{,}0$ m; $|\Delta h| = 0{,}5$ m
$v(h) = \sqrt{2g\cdot h}$; $v_0 = v(h_0) = 31{,}3$ m/s; $v'(h) = \frac{g}{\sqrt{2g\cdot h}}$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta v| \approx |dv| = |v'(h_0)|\cdot|\Delta v| = 0{,}313\cdot 0{,}5 = 0{,}16$ m/s;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta v|}{v_0} \approx \frac{|dv|}{v_0} = \frac{0{,}16}{31{,}3} = 0{,}005 = 0{,}5\%$

4.89 $x_0 = 480$ mm; $|\Delta x| = 1$ mm
$R_x(x) = 1000\cdot\frac{x}{1000-x}$; $R_{x0} = R_x(x_0) = 923{,}1\ \Omega$; $R_x'(x) = \frac{1000000}{(1000-x)^2}$;
absoluter Maximalfehler: $|\Delta R_x| \approx |dR_x| = |R_x'(x_0)|\cdot|\Delta x| = 3{,}698\cdot 1 \approx 3{,}7\ \Omega$;
relativer Maximalfehler: $\frac{|\Delta R_x|}{R_{x0}} \approx \frac{|dR_x|}{R_{x0}} = \frac{3{,}7}{923{,}1} = 0{,}004 = 0{,}4\%$

4.90 $|\Delta l|/l_0 = 1\%$; $T(l) = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $T_0 = T(l_0) = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$; $T'(l) = \dfrac{\pi}{\sqrt{g\cdot l}}$;

absoluter Maximalfehler: $|\Delta T| \approx |dT| = |T'(l_0)|\cdot|\Delta l| = \dfrac{\pi}{\sqrt{g\cdot l_0}}\cdot|\Delta l|$;

relativer Maximalfehler: $\dfrac{|\Delta T|}{T_0} \approx \dfrac{|dT|}{T_0} = \dfrac{\dfrac{\pi}{\sqrt{g\cdot l_0}}\cdot|\Delta l|}{2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|\Delta l|}{l_0} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\% = 0{,}5\%$

4.91 $\alpha_0 = 42°$; $|\Delta\alpha| = 0{,}5° = 0{,}00673$ rad

$A(\alpha) = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$; $A_0 = A(\alpha_0) = 1856{,}1\ \text{cm}^2$; $A'(\alpha) = \dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$;

absoluter Maximalfehler: $|\Delta A| \approx |dA| = |A'(\alpha_0)|\cdot|\Delta\alpha| = 2061\cdot 0{,}00673 = 18\ \text{cm}^2$;

relativer Maximalfehler: $\dfrac{|\Delta A|}{A_0} \approx \dfrac{|dA|}{A_0} = \dfrac{18}{1856{,}1} = 0{,}00969 \approx 1\%$

4.92 $\alpha_0 = 28°$; $|\Delta\alpha| = 1° = 0{,}01745$ rad

$h(\alpha) = 52\cdot\tan\alpha$; $h_0 = h(\alpha_0) = 27{,}65$ m; $h'(\alpha) = 52\cdot(1+\tan^2\alpha)$;

absoluter Maximalfehler: $|\Delta h| \approx |dh| = |h'(\alpha_0)|\cdot|\Delta\alpha| = 66{,}78\cdot 0{,}01745 = 1{,}16\ \text{m} \approx 1{,}2$ m;

relativer Maximalfehler: $\dfrac{|\Delta h|}{h_0} \approx \dfrac{|dh|}{h_0} = \dfrac{1{,}16}{27{,}65} = 0{,}042 = 4{,}2\%$

4.93 $a_0 = 20{,}0$ cm; $|\Delta a| = ?$ $O(a) = 6a^2$; $O_0 = O(a_0) = 2400\ \text{cm}^2$; $O'(a) = 12a$;

absoluter Maximalfehler der Oberfläche: $|\Delta O| \approx |dO| = |O'(a_0)|\cdot|\Delta a| = 240\cdot|\Delta a|$;

relativer Maximalfehler der Oberfläche: $\dfrac{|\Delta O|}{O_0} \approx \dfrac{|dO|}{O_0} = \dfrac{240\cdot|\Delta a|}{2400} = 0{,}01 \Rightarrow$

absoluter Messfehler der Seitenkante $|\Delta a| = 0{,}1$ cm $= 1$ mm

4.94 $|\Delta a|/a_0 = ?$

$V(a) = a^3$; $V_0 = V(a_0) = a_0^3$; $V'(a) = 3a^2$;

absoluter Maximalfehler des Volumens: $|\Delta V| \approx |dV| = |V'(a_0)|\cdot|\Delta a| = 3a_0^2\cdot|\Delta a|$;

relativer Maximalfehler des Volumens: $\dfrac{|\Delta V|}{V_0} \approx \dfrac{|dV|}{V_0} = \dfrac{3\cdot a_0^2\cdot|\Delta a|}{a_0^3} = 3\cdot\dfrac{|\Delta a|}{a_0} = 0{,}03 \Rightarrow$

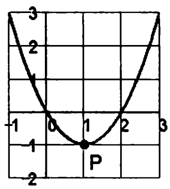
prozentuelle Messunsicherheit der Seitenkante $\dfrac{|\Delta a|}{a_0} = 0{,}01 = 1\%$

4.95 a) $\dot{x} = 1$; $\dot{y} = 2t$; $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$; $x(0) = 0+1 = 1$; $y(0) = 0^2 - 1 = -1$; P(1/–1)

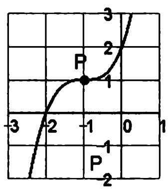
b) $\dot{x} = 1$; $\dot{y} = 3t^2$; $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$; $x(0) = -1$; $y(0) = 1$; P(–1/1)

c) $\dot{x} = \dfrac{1}{(2-t)^2}$; $\dot{y} = 2t$; $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2t}{(2-t)^2} = 0 \Rightarrow t = 0$; $x(0) = 0{,}5$; $y(0) = 0$; P(0,5/0)

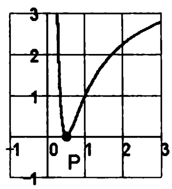
d) $\dot{x} = e^t$; $\dot{y} = 2t$; $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2t}{e^t} = 0 \Rightarrow t = 0$; $x(0) = e^0 = 1$; $y(0) = 1 + 0^2 = 1$; P(1/1)



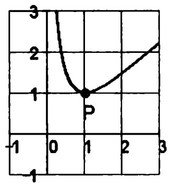
zu a)



zu b)



zu c)



zu d)

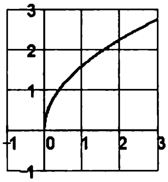
e) $\dot{x} = 2$; $\dot{y} = \frac{5}{2\sqrt{5t}}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5}{4\cdot\sqrt{5t}} = 0$; keine Lösung, daher kein Punkt mit waagrechter T.

f) $\dot{x} = -\sin t$; $\dot{y} = 2\sin t\cdot\cos t$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -2\cos t = 0 \Rightarrow t = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2$ usw.

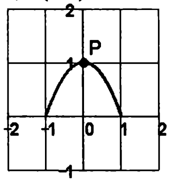
$x(\pm\pi/2) = x(\pm 3\pi/2) = \ldots = 0$; $y(\pm\pi/2) = y(\pm 3\pi/2) = \ldots = 1$; P(0/1)

g) $\dot{x} = \frac{1}{(1-t)^2}$; $\dot{y} = \frac{1}{(3-t)^2}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(1-t)^2}{(3-t)^2} = 0 \Rightarrow t = 1$; dieser Wert ist aber nicht im Definitionsbereich von $x = x(t)$; es gibt daher daher keine waagrechte Tangente

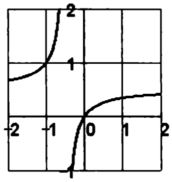
h) $\dot{x} = \frac{1}{t}$; $\dot{y} = \frac{t^2-1}{2t^2}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t^2-1}{2t} = 0 \Rightarrow t_1 = 1$; $t_2 = -1$ ist nicht im Definitionsbereich von $x = x(t)$; $x(1) = 0$; $y(1) = 1$; P(0/1)



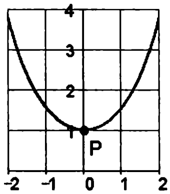
zu e)



zu f)



zu g)



zu h)

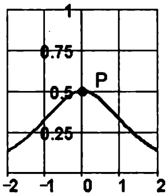
i) $\dot{x} = \frac{1}{t}$; $\dot{y} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t\cdot(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -1$; die Stellen t_1 und t_3 liegen nicht im Definitionsbereich von $x = x(t)$; $x(1) = 0$; $y(1) = 0{,}5$; P(0/0,5);

j) $\dot{x} = e^t + e^{-t}$; $\dot{y} = e^t - e^{-t}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 0$, d.h. $e^t = e^{-t}$ oder $e^{2t} = 1 \Rightarrow t = 0$;

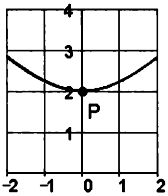
$x(0) = 0$; $y(0) = 2$; P(0/2);

k) $\dot{x} = 1$; $\dot{y} = (1-t)\cdot e^{-t}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (1-t)\cdot e^{-t} = 0 \Rightarrow t = 1$; $x(1) = 3$; $y(1) = 0{,}368$; P(3/0,368)

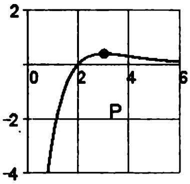
l) $\dot{x} = \frac{1}{(1-t)^2}$; $\dot{y} = 4\cdot(2t+1)$; $y' = 4\cdot(2t+1)\cdot(1-t)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = -0{,}5$; $t_2 = 1$ ist nicht im Definitionsbereich von $x = x(t)$; $x(-0{,}5) = -0{,}333$; $y(-0{,}5) = 0$; P(–0,3333/0)



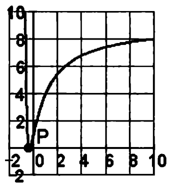
zu i)



zu j)



zu k)



zu l)

4.96 a) $x(0) = 2$; $y(0) = 1$; P(2/1); $\dot{x} = 2\cdot e^t$; $\dot{y} = -e^{-t}$; $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{2\cdot e^{2t}}$; $y'(t=0) = k = -0{,}5$

Tangente: $y = k\cdot x + d$; $y(0) = -0{,}5\cdot x(0) + d \Rightarrow d = 2$; $y = -0{,}5\cdot x + 2$

b) $x(1) = 1$; $y(1) = 1$; P(1/1); $\dot{x} = 4\cdot t$; $\dot{y} = 4\cdot t^3$; $y' = t^2$; $y'(t\!= 1) = k = 1$;

Tangente: $y(1) = 1\cdot x(1) + d \Rightarrow d = 0$; $y = x$

c) $x(\pi/4) = 2{,}12$; $y(\pi/4) = 2{,}12$; P(2,12/2,12); $\dot{x} = -3\cdot\sin t$; $\dot{y} = 3\cdot\cos t$; $y' = -\cot t$;

$y'(t = \pi/4) = k = -1$; Tangente: $y = -x + 4{,}24$

d) $x(1) = 1$; $y(1) = -0{,}307$; P(1/–0,307); $\dot{x} = -1/t^2$; $\dot{y} = 1/t$; $y' = -t$; $y'(t = 1) = -1$;

Tangente: $y = -x + 0{,}693$

4.96 e) $x(0,5) = 1,2$; $y(0,5) = 0,6$; $P(1,2/0,6)$; $\dot{x} = \frac{3\cdot(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$; $\dot{y} = \frac{6t}{(1+t^2)^2}$; $y' = \frac{2t}{1-t^2}$;

$y'(t = 0,5) = k = \frac{4}{3}$; Tangente: $y = \frac{4}{3}\cdot x - 1$

f) $x(0) = 0$; $y(0) = 1$; $P(0/1)$; $\dot{x} = \cosh t$; $\dot{y} = \sinh t$; $y' = \tanh t$; $y' = \tanh t$; $y'(t = 0) = k = 0$; Tangente: $y = 1$

g) $x(2) = 7,54$; $y(2) = 3,63$; $P(7,54/3,63)$; $\dot{x} = 2\cdot\sinh t$; $\dot{y} = \cosh t$; $y' = \frac{1}{2\cdot\tanh t}$;

$y'(t = 2) = 0,519$; Tangente: $y = 0,519\cdot x - 0,276$

h) $x(0,5) = 0,681$; $y(0,5) = 1,536$; $P(0,681/1,536)$; $\dot{x} = \frac{1}{2\cdot(t^2+1)\cdot\sqrt{\arctan t}}$; $\dot{y} = \frac{-1}{t^2+1}$;

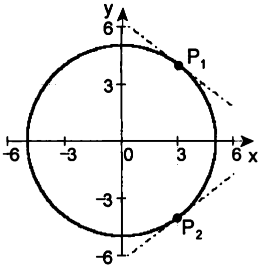
$y' = -2\cdot\sqrt{\arctan t}$; $y'(t = 0,5) = k = -1,362$; Tangente: $y = -1,362\cdot x + 2,464$

4.97 $x_0 = 3 = 5\cdot\cos t$ oder $\cos t = 0,6 \Rightarrow t_1 = 0,927$, $t_2 = 2\pi - t_1 = 5,536$;
$y(t_1) = 5\cdot\sin(t_2) = 4$; $P_1(3/4)$; $y(t_2) = 5\cdot\sin(t_2) = -4$; $P_2(3/-4)$;

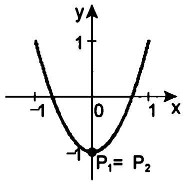
$\dot{x} = -5\cdot\sin t$; $\dot{y} = 5\cdot\cos t$; $y' = -\frac{1}{\tan t}$;

$y'(t_1) = -\frac{3}{4} = k_1$; Tangente durch P_1: $y = -\frac{3}{4}\cdot x + \frac{25}{4}$;

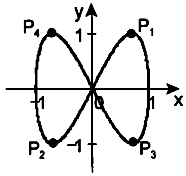
$y'(t_2) = \frac{3}{4} = k_1$; Tangente durch P_2: $y = \frac{3}{4}\cdot x - \frac{25}{4}$;



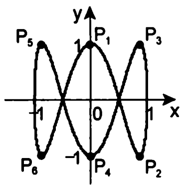
4.98 a) $\dot{x} = -\sin t$; $\dot{y} = -2\sin(2t) = -4\cdot\sin t\cdot\cos t$; $y' = 4\cdot\cos t = 0$
$\Rightarrow$ $t_1 = \pi/2$; $t_2 = 3\pi/2$;
$x(t_1) = 0$; $y(t_1) = -1$; $P_1(0/-1)$; $x(t_2) = 0$; $y(t_2) = -1$; $P_2 = P_1$



b) $\dot{x} = -\sin t$; $\dot{y} = 2\cdot\cos(2t)$; $y' = -\frac{2\cdot\cos(2t)}{\sin t} = 0$ oder $\cos(2t) = 0 \Rightarrow$
$2t = \pi/2$ oder $3\pi/2$ oder $5\pi/2$ oder $7\pi/2$ (solange noch gilt $0 \le t < 2\pi$), also:
$t_1 = \pi/4$; $t_2 = 3\pi/4$; $t_3 = 5\pi/4$; $t_4 = 7\pi/4$;
$P_1(0,701/1)$; $P_2(-0,701/-1)$; $P_3(-0,701/1)$; $P_4(0,701/-1)$



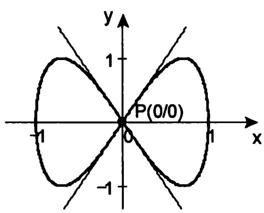
c) $\dot{x} = \cos t$; $\dot{y} = -3\cdot\sin(3t)$; $y' = -\frac{3\cdot\sin(3t)}{\cos t} = 0$ oder $\sin(3t) = 0 \Rightarrow$
$3t = 0$ oder π oder 2π oder 3π oder 4π oder 5π
(solange noch gilt: $0 \le t < 2\pi$), also:
$t_1 = 0$; $t_2 = \pi/3$; $t_3 = 2\pi/3$; $t_4 = \pi$; $t_5 = 4\pi/3$; $t_6 = 5\pi/3$;
$P_1(0/1)$; $P_2(0,866/-1)$; $P_3(0,866/1)$; $P_4(0/-1)$; $P_5(-0,866/1)$; $P_6(-0,866/-1)$



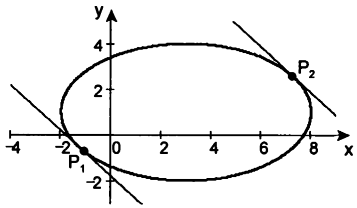
4.99 $x(t) = \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ sowie $t = \pi$;
$y(t) = \sin(2t) = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$ sowie 3π;
d.h. für $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi$ ist $P(0/0)$ ein Punkt des Graphen.

$\dot{x} = \cos(t)$; $\dot{y} = 2\cdot\cos(2t)$; $y' = \frac{2\cdot\cos(2t)}{\cos(t)}$;

$y'(t = 0) = 2$ sowie $y'(t = \pi) = -2$ sind die Steigungen der beiden Tangenten; da Ursprungsgeraden, ist $d = 0$: $y = 2x$ sowie $y = -2x$



4.100 $\dot{x} = -5\cdot\sin t$; $\dot{y} = 3\cdot\cos t$; $y' = -\dfrac{3\cdot\cos t}{5\cdot\sin t} = -\dfrac{3}{5\cdot\tan t}$;

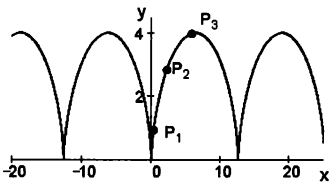


$y' = \tan 135° = -1$; $y' = -\dfrac{3}{5\cdot\tan t} = -1$ oder $\tan t = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow t_1 = 0{,}540$; $t_2 = \pi + t_1 = 3{,}682$;

daraus die Punklte: $P_1(7{,}29/2{,}54)$; $P_2(-1{,}29/-0{,}54)$

4.101 a) $\dot{x} = 2\cdot(1-\cos t)$; $\dot{y} = 2\cdot\sin t$; $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$;



t–Wert	Tangente
$t_1 = 1$: $P_1(0{,}317/0{,}919)$; $y'(t_1) = 1{,}830$	$y = 1{,}830\cdot x + 0{,}339$
$t_2 = 2$: $P_2(2{,}818/2{,}832)$; $y'(t_2) = 0{,}642$	$y = 0{,}642\cdot x + 1{,}432$
$t_3 = 3$: $P_3(5{,}718/3{,}980)$; $y'(t_3) = 0{,}071$	$y = 0{,}0709\cdot x + 3{,}575$

b) $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = 0$; der Zähler sin t ist null für $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi$ usw.

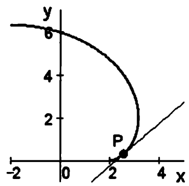
Für $t = 0$; $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ usw. ist allerdings *auch* der Nenner null, weshalb $t = 0$ nicht im Definitionsbereich der Ableitungsfunktion y' liegt. Der Graph lässt dort eine Spitze vermuten (wie unten gezeigt wird). Nur für $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ usw. liegt eine waagrechte Tangente vor. Die Berührpunkte haben die x–Koordinaten $\pm 2\pi = \pm 6{,}28$; $\pm 6\pi = \pm 18{,}85$; $\pm 10\pi = \pm 31{,}42$ usw. sowie alle die y–Koordinate 4.

Verhalten von y' für $t \to 0$:

$$y' = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{\sin(2\cdot t/2)}{1-\cos(2\cdot t/2)} = \frac{2\cdot\sin(t/2)\cdot\cos(t/2)}{\sin^2(t/2)+\cos^2(t/2)-\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)} = \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)};$$

$\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} = +\infty$; $\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} = -\infty$; daher besitzt y' bei $t = 0$ eine Spitze mit Steigungen $\pm\infty$. Für $t \to \pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ usw. gilt Gleiches, da x(t) und y(t) periodisch mit der Periode 2π sind.

4.102 $\dot{x} = 2t\cdot\cos t$; $\dot{y} = 2\cdot t\cdot\sin t$; $y' = \tan t$;

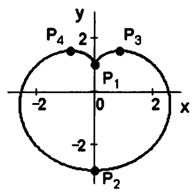


$y'(t = \pi/4) = 1$; $x(\pi/4) = 2{,}525$; $y(\pi/4) = 0{,}303$; $P(2{,}525/0{,}303)$;

Tangente: $y = x - 2{,}221$

4.103 $\dot{x} = 2\cdot\cos t - 2\cdot\cos(2t)$; $\dot{y} = -2\cdot\sin t + 2\cdot\sin(2t)$;

$y' = \dfrac{-\sin t+\sin(2t)}{\cos t-\cos(2t)} = 0$ oder $-\sin t + \sin(2t) = 0$;



$-\sin t + 2\cdot\sin t\cdot\cos t = \sin t\cdot(-1 + 2\cdot\cos t) = 0$;

daraus nach dem Produkt–Null–Satz:

(1) $\sin t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = \pi$; für $t_1 = 0$ ist jedoch *auch* der Nenner $\cos t - \cos(2t)$ von y' gleich null, weshalb $t = 0$ nicht im Definitionsbereich der Ableitungsfunktion y' liegt. Der Graph lässt dort, also im Punkt $P_1(0/1)$, eine Spitze vermuten (wie etwa mit der Regel von de l'Hospital, Lehrbuch, Seite 142 ff., gezeigt werden kann).

(2) $-1 + 2\cdot\cos t = 0$ oder $\cos t = 1/2 \Rightarrow t_3 = \pi/3$; $t_4 = 5\pi/3$

Somit lauten die Punkte mit einer waagrechten Tangente: $P_2(0/-3)$; $P_3(,866/1{,}5)$; $P_4(-0{,}866/1{,}5)$

4.104 a) $x(t) = 0$ für $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1; t_2 = 1$; $y(t) = 0$ für $t^3 - t = t\cdot(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t^1 = -1, t_2 = 1$, $t_3 = 0$; d.h. für $t_1 = -1; t_2 = 1$ sind sowohl x wie auch y null.

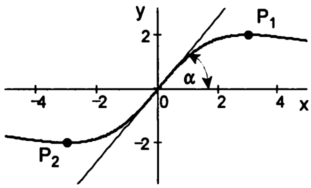
$$\dot{x} = 2\cdot\frac{2t\cdot(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^2} = 2\cdot\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2};\quad \dot{y} = 2\cdot\frac{(3t^2-1)\cdot(t^2+1)-(t^3-t)\cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^2} = 2\cdot\frac{t^4+4t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t^4+4t^2-1}{4t};\quad y'(t_1) = -1 = \tan\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -45° + 180° = 135°$$

$y(t_2) = -1 = \tan\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$

b) $y' = 0$ für $t^4 + 4t^2 - 1 = 0$; setzt man vorübergehend $u = t^2$, so erhält man eine quadratische Gleichung in u: $u^2 + 4u - 1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0{,}2361$; $u_2 = -4{,}2361$; $t = \pm\sqrt{u_1} \Rightarrow t_4 = 0{,}486$, $t_5 = -0{,}486$ (aus u_2 keine reelle Wurzel ziehbar); P(–1,236/–0,601); Q(–1,236/0,601);

4.105 a) $x = 0$ für $\cos t = 0 \Rightarrow t_0 = \pi/2$; $y = 0$ für $\sin(2t) = 0$ $\Rightarrow 2t = \pi$ (die weiteren Lösungen führen auf t–Werte außerhalb des Definitionsbereichs) oder $t_0 = \pi/2$



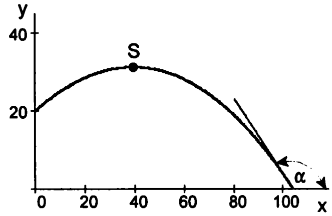
$$\dot{x} = 3\cdot\frac{-\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin^2 t} = -\frac{3}{\sin^2 t};\quad \dot{y} = 4\cdot\cos(2t)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{4\cdot\cos(2t)\cdot\sin^2 t}{3};$$

$y'(\pi/2) = \frac{4}{3} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = 53{,}1°$; Tangente: $y = \frac{4}{3}\cdot x$

b) $y' = 0$ für $\cos(2t)\cdot\sin^2 t = 0$; Produkt–Null–Satz:
(1) $\cos(2t) = 0 \Rightarrow 2t = \pi/2, 3\pi/2$ (alle weiteren Lösungen führen auf t–Werte außerhalb des Definitionsbereichs); damit: $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 3\pi/4$; $P_1(3/2)$, $P_2(-3/-2)$
(2) $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi$ usw., stets außerhalb des Definitionsbereichs

4.106 a) $\dot{x} = v_0\cdot\cos\alpha$; $\dot{y} = v_0\cdot\sin\alpha - g\cdot t$



b) $x = 30\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t = 15\sqrt{3}\cdot t$;

$y = 20 + 30\cdot\frac{1}{2}\cdot t - 5\cdot t^2 = 20 + 15\cdot t - 5\cdot t^2$

$y = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ s (Abschusszeitpunkt);
$t_2 = 4$ s (Zeitpunkt des Auftreffens am Boden)

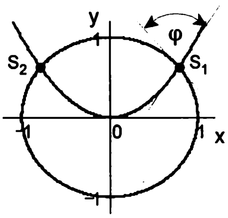
$\dot{x} = 15\sqrt{3}$; $\dot{y} = 15 - 10t$;

$v(t_2) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 10\sqrt{13} \approx 36{,}1$ m/s

c) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{15-10\cdot 4}{15\cdot\sqrt{3}} = -0{,}962 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = -43{,}9° + 180° = 136{,}1°$

d) $y' = 0$ für $\dot{y} = 15 - 10\cdot t = 0 \Rightarrow t = 1{,}5$ s; S(39,0 m/31,3 m)

4.107 a) $y(t) = f(x(t))$, d.h. $\sin t = \cos^2 t$; $\sin t = 1 - \sin^2 t$; $u = \sin t$
$u = 1 - u^2 \Rightarrow u_1 = 0{,}618$; $u_2 = -1{,}618$;
$\sin t = u_1 = 0{,}618$
$\Rightarrow t_1 = 0{,}666$; $t_2 = \pi - t_1 = 2{,}475$;
$\sin t = u_2$ ist nicht möglich, da ein Sinuswert zwischen –1 und +1 liegt.
$x_1 = \cos(t_1) = 0{,}786$; $x_2 = \cos(t_2) = -0{,}786 = -x_1$;
$y_1 = x_1^2 = 0{,}618$; $y_2 = x_2^2 = y_1$;
Schnittpunkte: $S_1(0{,}786/0{,}618)$; $S_2(-0{,}786/0{,}618)$;
Parabel: $y' = 2x$; $y'(x_1) = 1{,}572 = k_1$;



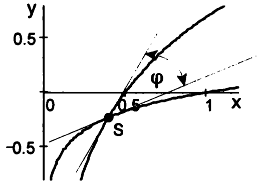
Schnitt Parabel mit Kreislinie

Kreislinie: $\dot{x} = -\sin t$; $\dot{y} = \cos t$; $y' = \dot{y}/\dot{x} = -\cos t/\sin t$; $y'(t_1) = -1{,}272 = k_2$

$\tan\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 2{,}845 \Rightarrow \varphi = 70{,}6°$.

Der Schnittwinkel in S_2 ist aus Symmetriegründen ebenfalls gleich φ.

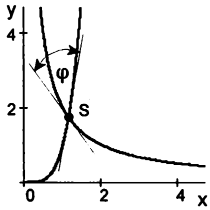
b) $y(t) = f(x(t))$, d.h. $\ln\sqrt{t} = \ln(2t^2)$; daraus $\sqrt{t} = (2t^2)$
oder $t = 4t^4$ und $t \cdot (1 - 4t^3) = 0$.
Produkt–Null–Satz:
(1) $t_1 = 0$, ist nicht im Definitionsbereich von $y(t)$
(2) $1 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t_2 = 0{,}630$; $x(t_2) = 0{,}397$; $y(t_2) = -0{,}231$;
Schnittpunkt S(0,397/–0,231).



1. Funktion: $y' = 1/x$; $y'(0{,}397) = 2{,}520 = k_1$;
2. Funktion: $\dot{x} = 2t$; $\dot{y} = 1/(2t)$; $y' = \dot{y}/\dot{x} = 1/4t^2$; $y'(t_2) = 0{,}630 = k_2$;

$\tan\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = -0{,}730 \Rightarrow \varphi^* = -36{,}1°$; $\varphi^* + 180° = 143{,}9°$ bzw. supplementär $\varphi = 36{,}1°$.

4.108 a) I: $2 \cdot e^t = \sqrt{\tau}$
II: $e^{-t} = \tau^2$
nichtlineares Gleichungssystem; I $\Rightarrow \tau = 4 \cdot e^{2t}$, in II einsetzen:
$e^{-t} = 16 \cdot e^{4t}$ oder $e^{5t} = 1/16 \Rightarrow t_0 = -0{,}554$;
$\tau_0 = 4 \cdot e^{2 \cdot (-0{,}554)} = 1{,}320$;
$x(t_0) = 2 \cdot e^{-0{,}554} = 1{,}15$; $y(t_0) = e^{-(-0{,}554)} = 1{,}74$;
Schnittpunkt S(1,15/1,74);



1. Funktion: $\dot{x} = 2 \cdot e^t$; $\dot{y} = -e^{-t}$; $y' = -\dfrac{1}{2 \cdot e^{2 \cdot t}}$; $y'(t_0) = -1{,}516 = k_1$

2. Funktion: $\dot{x} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{\tau}}$; $\dot{y} = 2 \cdot \tau$; $y' = 4 \cdot \sqrt{\tau^3}$; $y'(\tau_0) = 6{,}063 = k_2$

$\tan\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = -0{,}925 \Rightarrow \varphi^* = -42{,}8°$; $\varphi^* + 180° = 137{,}2°$ bzw. supplementär $\varphi = 42{,}8°$

b) I: $\sqrt{\ln t} = \sqrt{2\tau}$
II: $\ln(2t) = \sqrt{\tau + 1}$
nichtlineares Gleichungssystem; I $\Rightarrow \ln t = 2\tau$ und damit $t = e^{2\tau}$;
in II einsetzen: $\ln(2 \cdot e^{2\tau}) = \ln 2 + \ln(e^{2\tau}) = \ln 2 + 2\tau = \sqrt{\tau + 1}$;
diese Wurzelgleichung führt nach Quadrieren auf
$\tau^2 + 0{,}44315 \cdot \tau - 0{,}12989 = 0 \Rightarrow$
$\tau_1 = 0{,}201$ und $\tau_2 = -0{,}645$; τ_2 ist keine Lösung der Wurzelgleichung (Probe!); $t_1 = e^{2 \cdot 0{,}201} = 1{,}496$;
$x(\tau_1) = \sqrt{2 \cdot 0{,}201} = 0{,}635$; $y(\tau_1) = \sqrt{0{,}201 + 1} = 1{,}096$;
Schnittpunkt S(0,635/1,096);

1. Funktion: $\dot{x} = \dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$; $\dot{y} = \dfrac{1}{t}$; $y' = 2\sqrt{\ln t}$; $y'(t_1) = 1{,}270 = k_1$

2. Funktion: $\dot{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2\tau}}$; $\dot{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau + 1}}$; $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{2\tau}{\tau + 1}}$; $y'(\tau_1) = 0{,}290 = k_2$

$\tan\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = -0{,}717 \Rightarrow \varphi^* = -35{,}6°$; $\varphi^* + 180° = 144{,}4°$ bzw. supplementär $\varphi = 35{,}6°$

5 Anwendungen der Differentialrechnung

5.1 a) $y(t) = 2 + 30t - 5t^2$; $y(2) = 42$ m

Zeitintervall [2s; 2,5 s]: $y(2{,}5) = 45{,}75$ m; $\Delta y/\Delta t = (45{,}75 - 42)/0{,}5 = 7{,}5$ m/s

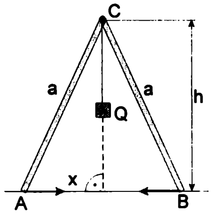
Zeitintervall [2s; 2,1 s]: $y(2{,}1) = 42{,}95$ m; $\Delta y/\Delta t = (42{,}95 - 42)/0{,}1 = 9{,}5$ m/s

Zeitintervall [2s; 2,01 s]: $y(2{,}01) = 42{,}0995$ m; $\Delta y/\Delta t = (42{,}0995 - 42)/0{,}01 = 9{,}95$ m/s

b) $v(t) = y'(t) = 30 - 10 \cdot t$; $v(2) = 10$ m/s

c) Maximale Höhe, wenn $v = y'(t) = 30 - 10t = 0 \Rightarrow t = 3$ s; maximale Höhe $y(3) = 47$ m

5.2 Die Last Q wird mit derselben Geschwindigkeit gehoben, mit der sich der Punkt C nach oben bewegt. Dessen Höhe sei h; a = 8 m.



$$h = \sqrt{8^2 - x^2}\,,\ \dot{h} = \frac{dh}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{x}{\sqrt{8^2 - x^2}} \cdot \dot{x}\,;$$

Einsetzen: $\dot{h} = \dfrac{1}{\sqrt{8^2 - 1^2}} \cdot 1 = 0{,}13$ m/s.

5.3 $x : y = 4 : 8,\ x = y/2;\ V = \pi x^2 y/3 = \pi\, y^3/12;\ \dot{V} = (dV/dy) \cdot \dot{y} = \left(\pi y^2/4\right) \cdot \dot{y}\,;$

$\dot{y} = 4\dot{V}/(\pi y^2)$; Einsetzen: $\dot{y} = 12/(25\,\pi) = 0{,}153$ m/h

5.4 $e(t) = \sqrt{(200 \cdot t)^2 + (300 \cdot (t-1))^2} = 100 \cdot \sqrt{(2 \cdot t)^2 + (3 \cdot (t-1))^2} = 100 \cdot \sqrt{13 \cdot t^2 - 18 \cdot t + 9}$

$$\dot{e} = 100 \cdot \frac{13 \cdot t - 9}{\sqrt{13 \cdot t^2 - 18 \cdot t + 9}}\,;$$

$\dot{e}(2) = 340$ km/h = Geschw., mit der sich die Flugzeuge um 14 Uhr voneinander wegbewegen.

5.5 $a(t)$ ist die Würfelkante zur Zeit t; $a(0) = 10$ dm; $V(0) = 10^3$ dm^3;

$V(t) = [a(t)]^3 = 10^3\ \text{dm}^3 + (1\ \text{dm}^3/\text{min}) \cdot t = 10^3 + t\,;\ a(t) = \sqrt[3]{10^3 + t}\,;$

$$\dot{a} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(10^3 + t)^2}} \cdot 1\,;\quad \dot{a}(0) = \frac{1}{300}\ \text{dm/min} = \frac{1}{3}\ \text{mm/min}$$

5.6 $q(t) = 25 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot \text{As}\left(1 - e^{-t/(30 \cdot 10^{-6} \cdot 1000\,s)}\right);$

$$i = \dot{q} = 25 \cdot 30 \cdot 10^{-6}\ \text{As} \cdot \frac{1}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 1000\ s} \cdot e^{-t/(30 \cdot 10^{-3}\,s)} = \frac{25}{1000}\ \text{A} \cdot e^{-t/30\,\text{ms}} = 25\ \text{mA} \cdot e^{-t/30\,\text{ms}}$$

5.7 $q(t) = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{As} \cdot e^{-\frac{t}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 1000\,s}}\,;$

$$i = \dot{q} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{As} \cdot \frac{1}{-3010^{-6} \cdot 1000\,s} \cdot e^{-\frac{t}{30 \cdot 10^{-3}\,s}} = -25\,\text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{30\text{ms}}}\,;\ |i| = 25\,\text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{30\text{ms}}}$$

5.8

Polynomdivision	Regel von de L'HOSPITAL
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 4$	$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 3) = 4$	$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 2}{1} = 4$
c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3}(x - 1) = 2$	$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 4}{1} = 2$
d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x - 3) = -1$	$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{1} = -1$
e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{(x - 2)^2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 1) = 3$	$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x - 5}{2 \cdot (x - 2)} = \dfrac{\text{"}0\text{"}}{\text{"}0} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6x - 6}{2} = 3$

5.8

Polynomdivision	Regel von de L'HOSPITAL
f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$	$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x}=2$
g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+3x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3\right)=-2$	$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-3x^2-6x+3}{2x-1}=-2$
h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-3x^4+3x^2-1}{x^4-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$	$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^5-12x^3+6x}{4x^3-4x}=\dfrac{\text{"}0}{0\text{"}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{30x^4-36x^2+6}{12x^2-4}=0$
i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)=\dfrac{1}{4}$	$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{3x^2-4x-4}=\dfrac{\text{"}0}{0\text{"}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-10}{6x-4}=\dfrac{1}{4}$

5.9

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{2x}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{1+2x}}{1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}=1$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{1-x}}{1}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{1}=-1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\cos(2x)}{1}=2$

h) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(2x)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2\cdot\cos(2x)}{1+\tan^2 x}=2$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a\cdot x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot\cos(a\cdot x)}{1}=a$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(b\cdot x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot\sin(b\cdot x)}{1}=0$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot x-\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\cos x+x\cdot\sin x}=a-1$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin(a\cdot x)}{\tan(b\cdot x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cdot\cos(a\cdot x)}{b\cdot\left(1+\tan^2(b\cdot x)\right)}=\dfrac{1+a}{b}$

5.10 Manche Aufgaben können leicht ohne Anwendung der Regel von de L'HOSPITALgelöst werden.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=3$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{-1}=-3$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}}{1}=\dfrac{0}{1}=0$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x+1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x-1}}=\sqrt{4}=2$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a\cdot x+3)/x}{(x+1)/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+3/x}{1+1/x}=a$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+a}{2x^2+b}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(a\cdot x)}{\sqrt{x^2+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{x/\sqrt{x^2+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{b}{x^4}}=0$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{6}=\infty$

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\cosh x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\frac{1}{2}\cdot\left(e^x+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot e^x}{e^x+e^{-x}}\cdot\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+e^{-2x}}=2$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\sinh x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\frac{1}{2}\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}\cdot\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1-e^{-2x}}=2$

5.11 a) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}}} = -2\cdot \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^{-1}}{x^{-\frac{3}{2}}} = -2\cdot \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3e^{3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{9e^{3x}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\cdot \ln(2x+a) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2x+a)}{x} = 2\cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot(2x+a)} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x\cdot \tan\dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\frac{1}{\tan(x/2)}} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x}{-\frac{1}{2\cdot\sin^2(x/2)}} = \lim\limits_{x\to\pi}(-2)\cdot\sin^2(x/2)\cdot\cos x = 2$ oder :

$\lim\limits_{x\to\pi} \sin x\cdot \tan\dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi} \sin\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)\cdot\tan\dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi} 2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \lim\limits_{x\to\pi} 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 2$

f) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to 0+} \tan x\cdot \ln(2x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(2x)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-2\sin x\cdot\cos x}{1} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan x = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{(\pi-2x)\cdot\sin x}{2\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{-2\cdot\sin x + (\pi-2x)\cdot\cos x}{-2\sin x} = \dfrac{-2\cdot 1 + 0\cdot 0}{-2} = 1$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \dfrac{1}{2}\cdot \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\pi - 2\cdot\arctan x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\cdot\arctan x}{2\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-2}{1+x^2}}{2\cdot\frac{-1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$

5.12 Manche Aufgaben können ohne Anwendung der Regel von de L'HOSPITALgelöst werden.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1-} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x}{1-x^2} = \infty$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right) = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\ln e^x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{e^x}{x} = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{1}\right) = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{\cos x} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0-} \left(\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0-} \left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{2x\cdot\cos x - \sin x}{2x\cdot\sin x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-2x\cdot\sin x + \cos x}{2\sin x + 2x\cdot\cos x} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x\cdot\ln x + x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x + 1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

5.13 a) $\lim\limits_{x\to 0+}(2x)^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln(2x)} = e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln(2x) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(2x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln(1/x)} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot[\ln 1-\ln x]} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{-x\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^0 = 1$, weil

$$\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\frac{x}{1+x}} = e^{-1}$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x}{1+x} = "\infty\cdot 0" = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{1+x}}{1/x} =$

$$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1+x}{x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 = -\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^2 = -1$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = "\infty\cdot 0" = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1/x} =$

$$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = -\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}+1\right) = -1$$

e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\cdot\ln x} = e^{-1}$, weil $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x}{-1} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\sin x\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\sin x} =$

$$= \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

g) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln\sin x} = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2} =$

$$= -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2x\cdot\cos x - x^2\cdot\sin x}{\cos x} = 0$$

h) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\tan x\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0+}\tan x\cdot\ln x = \text{“}0\cdot(-\infty)\text{”} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\tan x} =$

$$= \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x} = "\frac{0}{0}" = -\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1} = 0$$

i) $\lim\limits_{x\to 0+}\tan x^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\tan x\cdot\ln(\tan x)} = \lim\limits_{x\to 0+} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0+}\tan x\cdot\ln(\tan x) = \text{“}0\cdot(-\infty)\text{”} =$

$$= \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(\tan x)}{1/\tan x} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/(\sin x\cdot\cos x)}{-1/\sin^2 x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\tan x = 0$$

j) $\lim\limits_{x\to 0}(\cosh x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\cosh x/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cosh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x/\cosh x}{1} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^0 = 1$, weil $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$

5.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^1 = e$, weil

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1$$

5.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ wieder der ursprüngliche Term.

Andere Vorgansweise: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$

5.16 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2} = \dfrac{0"}{"0} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x}$; nach Einsetzen von $x = 2$ entsteht kein unbestimmter Ausdruck mehr, die Regel von de l'Hospital kann nicht mehr angewendet werden.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x} = \dfrac{3\cdot 2^2-4\cdot 2+1}{3\cdot 2^2-4\cdot 2} = \dfrac{5}{4}$

5.17 a) kein unbestimmter Ausdruck, Anwendung der Regel von de l'Hospital nicht zulässig
b) richtig

5.18 Unbestimmte Form "0/0", Zähler und Nenner nach Δx ableiten:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{d(\sin(x+\Delta x)-\sin x)}{d\Delta x}}{\frac{d\Delta x}{d\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-0}{1} = \cos x$$

5.19 Unbestimmte Form "0/0", Zähler und Nenner nach ω ableiten:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{v_0}{\omega}\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t) = v_0\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\omega\cdot t)}{\omega} = v_0\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{t\cdot\cos(\omega\cdot t)}{1} = v_0\cdot t\cdot e^{-\delta\cdot t}$$

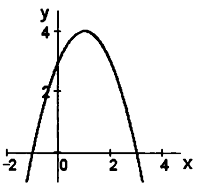
5.20 Zähler und Nenner nach k ableiten:

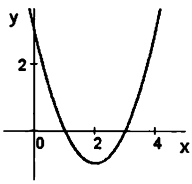
a) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{m\,g\left(1-e^{-2ks/m}\right)}{k} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{m\,g\cdot\left(0+2s\cdot e^{-2ks/m}/m\right)}{1} = 2gs$; damit: $v = \sqrt{2gs}$

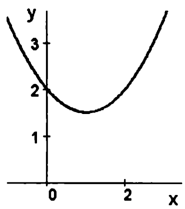
b) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{m\cdot\ln\left[\cosh\left(t\cdot\sqrt{\frac{k\,g}{m}}\right)\right]}{k} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{t\sqrt{m\,g}\cdot\tanh\left(t\cdot\sqrt{\frac{k\,g}{m}}\right)}{2\sqrt{k}} = „\dfrac{0}{0}" =$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{2}g\,t^2\cdot\frac{1}{\cosh^2\left(t\cdot\sqrt{\frac{k\,g}{m}}\right)} = \frac{1}{2}g\,t^2\cdot 1 = \frac{1}{2}g t^2$$

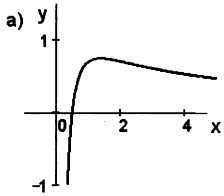
5.21 a) $y' = -2x+2 = 0 \Rightarrow x_S = 1$; $y_S = y(1) = 4$; S(1/4)
b) $y' = 2x-4 = 0 \Rightarrow x_S = 2$; $y_S = y(2) = -1$; S(2/–1)
c) $y' = x-1 = 0 \Rightarrow x_S = 1$; $y_S = y(1) = 1{,}5$; S(1/1,5)







5.22 a)



$y' = \frac{1-\ln(2x)}{x^2} = 0,$

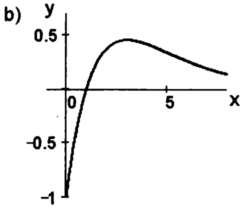
$1 - \ln(2x) = 0, \ln(2x) = 1;$

$e^{\ln(2x)} = e^1; 2x = e \Rightarrow x_0 = 1{,}359;$

$y(x_0) = 0{,}736; \; y'' = \frac{2\cdot\ln(2x)-3}{x^2}$

$y''(x_0) < 0 \Rightarrow H(1{,}359/0{,}736)$

b)



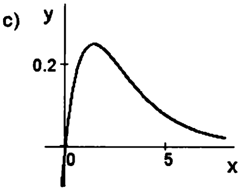
$y' = \frac{3-x}{2}\cdot e^{-x/2} = 0,$

$3 - x = 0 \Rightarrow x_0 = 3;$

$y(x_0) = 0{,}446; \; y'' = \frac{x-5}{4}\cdot e^{-x/2};$

$y''(x_0) < 0 \Rightarrow H(3/0{,}446)$

c)



$y' = e^{-x} - \frac{1}{2}\cdot e^{-x/2} = 0,$

$2\cdot e^{-x} = e^{-x/2} \;|: e^{-x}$

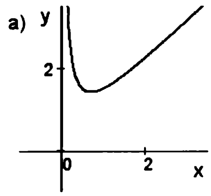
$2 = e^{x/2} \Rightarrow x_0 = 2\cdot\ln(2) = 1{,}386;$

$y_0(x_0) = 0{,}25;$

$y'' = -e^{-x} + \frac{1}{4}\cdot e^{-x/2} = 0$

$y''(x_0) < 0 \Rightarrow H(1{,}386/0{,}25)$

5.23 a)



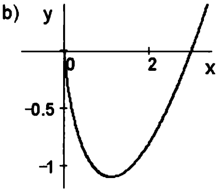
$y' = 1 - \frac{1}{2x^2} = 0, \; 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$x_0 = 0{,}707; \; y(x_0) = 1{,}414;$

$y'' = 1/x^3;$

$y''(x_0) > 0 \Rightarrow T(0{,}707/1{,}41)$

b)



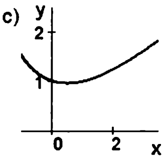
$y' = 1 + \ln\frac{x}{3} = 0; \; \ln(x/3) = -1;$

$e^{\ln(x/3)} = e^{-1}; \Rightarrow x_0 = 1{,}104;$

$y(x_0) = -1{,}104; \; y'' = 1/x;$

$y''(x_0) > 0 \Rightarrow T(1{,}104/-1{,}104)$

c)



$y' = \frac{1}{2} - 2^{-x}\cdot\ln 2 = 0;$

$2^{-x} = 1/(2\cdot\ln 2) = 0{,}721;$

$\ln 2^{-x} = \ln 0{,}721 \Rightarrow x_0 = 0{,}471;$

$y(x_0) = 0{,}957; \; y'' = (\ln 2)^2\cdot 2^{-x};$

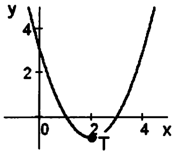
$y''(x_0) > 0 \Rightarrow T(0{,}471/0{,}957)$

5.24 a) $y' = 2x - 4; \; y'' = 2$

$y' = 0 \Rightarrow x_0 = 2;$

$y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow x_0 = 2$ ist Minimumstelle

$y_0 = y(2) = -1; \; T(2/-1)$

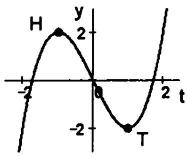


b) $y'(t) = 3t^2 - 3; \; y''(t) = 6t;$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 1; \; t_2 = -1;$

$y''(1) = 6\cdot 1 > 0 \Rightarrow t_1$ ist Minimumstelle; $T(1/-2)$

$y''(-1) = 6\cdot(-1) < 0 \Rightarrow t_2$ ist Maximumstelle; $H(-1/2)$



c) $y' = 4x^3 - 9x; \; y'' = 12x^2 - 9;$

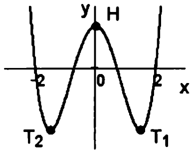
$y' = 4x^3 - 9x = x\cdot(4x^2 - 9) = 0;$ Produkt–Nullsatz $\Rightarrow$

$x_1 = 0; \; x_2 = 1{,}5; \; x_3 = -1{,}5;$

$y''(0) = -9 < 0 \Rightarrow x_1$ ist Maximumstelle; $H(0/2)$

$y''(1{,}5) = 18 > 0 \Rightarrow x_2$ ist Minimumstelle; $T(1{,}5/-3{,}063)$

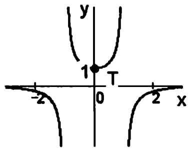
$y''(-1{,}5) = 18 > 0 \Rightarrow x_3$ ist Minimumstelle; $T(-1{,}5/-3{,}063)$



5.24 d) $y' = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$; $y'' = \dfrac{2\cdot(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$;

$y' = 0,\ 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$;

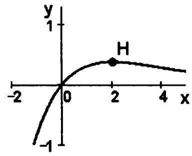
$y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x_0 = 0$ ist Minimumstelle; T(0/1)



e) $y' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$; $y'' = \left(\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$;

$y' = 0,\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} = 0 \Rightarrow x_0 = 2$

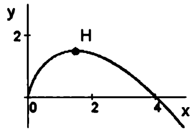
$y''(2) = -0{,}092 \Rightarrow x_0 = 2$ ist Maximumstelle; H(2/0,368)



f) $y' = -1 + \ln\dfrac{4}{x}$; $y'' = -\dfrac{1}{x}$;

$y' = 0$ oder $\ln\dfrac{4}{x} = 1$; $e^{\ln(4/x)} = e^1$; $\dfrac{4}{x} = e \Rightarrow x_0 = \dfrac{4}{e} = 1{,}472$

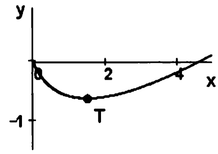
$y'' = -1/1{,}471 < 0 \Rightarrow x_0 = 1{,}472$ ist Maximumstelle; H(1,472/1,472)



g) $y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{2x+1}$; $y'' = \dfrac{4}{(2x+1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$;

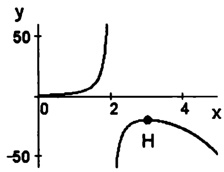
$y''(1{,}5) = 0{,}25 > 0 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$ ist Minimumstelle; T(1,5/–0,636)



h) $y' = \dfrac{(3-x)\cdot e^x}{(2-x)^2}$; $y'' = \dfrac{(x^2-6x+10)\cdot e^x}{(2-x)^3}$

$y' = 0,\ 3 - x = 0 \Rightarrow x_0 = 3$;

$y''(3) = -20{,}09 < 0 \Rightarrow x_0 = 3$ ist Maximumstelle; H(3/–20,09)



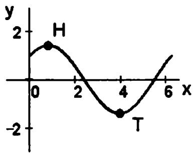
i) $y' = \cos x - \sin x$; $y'' = -\sin x - \cos x$;

$y' = 0$ oder $\cos x = \sin x$; Division durch cos x führt auf

$\tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \pi/4 = 0{,}785$; $x_2 = x_1 + \pi = 3{,}927$;

$y''(0{,}785) = -1{,}414 < 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}785$ Max. stelle; H(0,785/1,414)

$y''(3{,}927) = 1{,}414 > 0 \Rightarrow x_1 = 3{,}927$ Min. stelle; H(3,927/–1,414)



5.25 a) $y' = 6x - 3x^2 - 3x^3$; $y'' = 6 - 6x - 9x^2$; $y''' = -6 - 18x$

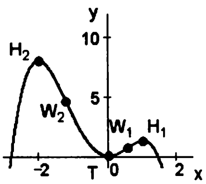
Extrema: $y' = 3x\cdot(2 - x - x^2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$

$x_1 = 0$; $2 - x - x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = -2$

$y''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ist Minimumstelle; T(0/0)

$y''(1) = -9 < 0 \Rightarrow x_2 = 1$ ist Maximumstelle; $H_1(1/1{,}25)$

$y''(-2) = -18 < 0\ x_3 = -2$ ist Maximumstelle; $H_2(-2/8)$



Wendepunkte: $y'' = 6 - 6x - 9x^2 = 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}549$; $x_5 = -1{,}215$

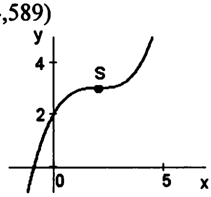
$y'''(0{,}549) = -15{,}87 \neq 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}549$ ist Wendestelle; $W_1(0{,}549/0{,}671)$

$y'''(-1{,}215) = 15{,}87 \neq 0 \Rightarrow x_5 = -1{,}215$ ist Wendestelle; $W_2(-1{,}215/4{,}589)$

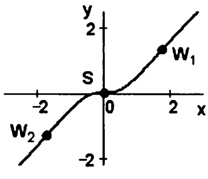
b) $y' = 3x^2/8 - 3x/2 + 3/2$; $y'' = 3x/4 - 3/2$; $y''' = 3/4$

Extrema: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $y''(0) = 0 \Rightarrow$ noch keine Entscheidung möglich. Wendepunkte: $y'' = 0 \Rightarrow x_2 = 2$;

$y'''(2) = 3/4 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 2$ ist Wendestelle; da hier eine waagrechte Tangente, ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt; S(2/3)

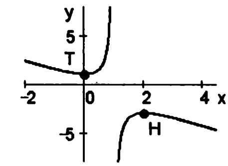


5.25 c) $y' = \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(1+x^2)^2}$; $y'' = \frac{2x \cdot (3-x^2)}{(1+x^2)^3}$; $y''' = \frac{6 \cdot (x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}$;



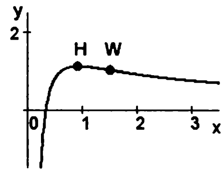
Extrema: $y' = 0$ oder $x^2 \cdot (x^2+3) = 0$; hier kann nur x^2 null sein $\Rightarrow$
$x_1 = 0$; $y''(0) = 0$ $\Rightarrow$ noch keine Entscheidung möglich
Wendepunkte: $y'' = 0$ oder $2x \cdot (3-x^2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$
$x_2 = 0$ sowie $x_3 = \sqrt{3} = 1{,}732$; $x_4 = -\sqrt{3} = -1{,}732$;
$y'''(0) = 6 \neq 0$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ ist Wendestelle; da hier eine waagrechte Tangente, ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt; S(0/0);
$y'''(1{,}732) = -0{,}1875 \neq 0$ $\Rightarrow x_3 = 1{,}732$ ist Wendestelle; $W_1(1{,}732/1{,}299)$
$y'''(-1{,}732) = -0{,}1875 \neq 0$ $\Rightarrow x_4 = 1{,}732$ ist Wendestelle $W_2(-1{,}732/-1{,}299)$

d) $y' = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$; $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$; $y''' = \frac{6}{(1-x)^4}$;



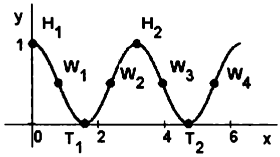
Extrema: $y' = 0$, $2x-x^2 = x \cdot (2-x) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$;
$y''(0) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ ist eine Minimumstelle; T(0/1);
$y''(2) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$ ist eine Maximumstelle; H(2/–3);
Wendepunkte: $y'' = 0$ nicht erfüllbar, also keine Wendepunkte

e) $y' = \frac{1-\ln(3x)}{x^2}$; $y'' = \frac{2 \cdot \ln(3x)-3}{x^3}$; $y''' = \frac{11-6 \cdot \ln(3x)}{x^4}$;



Extrema: $y' = 0$, $1 - \ln(3x) = 0$; $\ln(3x) = 1$; $e^{\ln(3x)} = e^1$;
$3x = e$ $\Rightarrow$ $x_1 = e/3 = 0{,}906$;
$y''(0{,}906) = -1{,}344$ $\Rightarrow$ 0,906 ist Maximumstelle; H(0,906/1,104)
Wendepunkte: $y'' = 0$, $2 \cdot \ln(3x) - 3 = 0$ $\Rightarrow x_2 = 1{,}494$
$y'''(1{,}494) = 0{,}402 \neq 0$ $\Rightarrow$ 1,494 ist Wendestelle W(1.494/1,004)

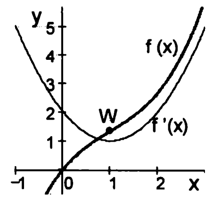
f) Untersuchung im Intervall $[0, 2\pi[$:



$y' = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\sin(2x)$; $y'' = -2 \cdot \cos(2x)$; $y''' = 4 \cdot \sin(2x)$;
Extrema: $y' = -\sin(2x) = 0$ $\Rightarrow$ $2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ oder
$x_1 = 0$; $x_2 = \pi/2$; $x_3 = \pi$; $x_4 = 3\pi/2$;
$y''(0) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ ist Maximumstelle; $H_1(0/1)$
$y''(\pi/2) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = \pi/2$ ist Minimumstelle; $T_1(1{,}571/0)$
$y''(\pi) = -2 < 0$ $\Rightarrow$ $x_3 = \pi$ ist Maximumstelle; $H_2(3{,}142/1)$
$y''(3\pi/2) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ $x_4 = 3\pi/2$ ist Minimumstelle; $T_2(4{,}712/0)$;
Wendepunkte: $y'' = -2 \cdot \cos(2x) = 0$
$\Rightarrow 2x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2$ oder $x_5 = \pi/4$; $x_6 = 3\pi/4$; $x_7 = 5\pi/4$; $x_8 = 7\pi/4$;
für alle diese Stelle ist $y''' \neq 0$, daher Wendestellen;
$W_1(0{,}785/0{,}5)$; $W_2(2{,}356/0{,}5)$; $W_3(3{,}927/0{,}5)$; $W_4(5{,}498/0{,}5)$

5.26 $f'(x)$ ist stets nichtnegativ; daher muss $f(x)$ eine monoton wachsende Funktion sein; $f'(x)$ ist anfänglich und schließlich wieder stark positiv ; d.h. $f(x)$ steigt anfänglich stark und dies gilt auch schließlich wieder; dazwischen ist $f'(x) = 0$, d.h. $f(x)$ hat dort eine waagrechte Tangente. Aus allen diesen Forderungen folgt, dass der Graph von $f_2(x)$ jener von $f'(x)$ sein muss.

5.27 a) Kein Extremum, da $f'(x)$ nirgends null ist; Wendepunkt an der Stelle $x = 1$, da dort $f''(x) = (f'(x))'$ null ist und $f''(x) < 0$ für $x < 1$ und $f''(x) > 0$ für $x > 1$.



b) Da $f'(x)$ stets > 0, besitzt der Graph von $f(x)$ überall positive Steigung, $f(x)$ ist also streng monoton steigend.
c) Siehe Abbildung. Gezeichnet ist der Graph einer möglichen Funktion. Er könnte beliebig nach oben oder unten verschoben werden.

5.28 $\frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{bx+c} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{b + c/x} = \frac{1}{b+0} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 2$; da 1 eine Polstelle ist, muss dort der Nenner null sein: $b \cdot 1 + c = 0$, d.h. $c = -b = -2$. Daher: $y = \frac{x}{2x-2}$.

5.29 $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$; $y' = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$; $y'' = 6a\,x + 2b$

Die Koeffizienten a, b, c, und d sind zu bestimmen.

a)
$$\begin{aligned} &\text{I: } a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \\ &\text{II: } a\,0^3 + b\,0^2 + c\,0 + d = -4 \\ &\text{III: } a\,2^3 + b\,2^2 + c\,2 + d = 2 \\ &\text{IV: } a\,3^3 + b\,3^2 + c\,3 + d = 8 \end{aligned}$$

Mit $d = -4$ ergibt sich etwa aus I: $c = 4 - a - b$.
Einsetzen in III und IV ergibt:
$$\begin{aligned} 6a + 2b &= -2 \\ 24a + 6b &= 0 \end{aligned}$$

Daraus: $a = 1$, $b = -4$; $c = 4 - a - b = 7$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

b)
$$\begin{aligned} a\,0^3 + b\,0^2 + c\,0 + d &= 0 \\ a\,4^3 + b\,4^2 + c\,4 + d &= 2 \\ a\,6^3 + b\,6^2 + c\,6 + d &= 0 \\ 3a\,6^2 + 2b\,6 + c &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1/8$; $b = -3/2$; $c = 9/2$; $d = 0$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$$y = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot x$$

c) Ungerade Funktion: $b = d = 0$
$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d &= -2 \\ 3a\,1^2 + 2b\,1 + c &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1$; $c = -3$.
Gesuchte Funktionsgleichung: $y = x^3 - 3x$

d)
$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d &= 7 \\ 3a\,1^2 + 2b\,1 + c &= 0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d &= 1 \\ 3a\,3^2 + 2b\,3 + c &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 3/2$; $b = -9$; $c = 27/2$; $d = 1$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$$y = \frac{3}{2} \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + \frac{27}{2} \cdot x + 1$$

Voyage 200/TI 89

```
■ solve(a + b + c + d = 7 and 3·a + 2·b + c = 0▸
   a = 3/2 and b = -9 and c = 27/2 and d = 1
...=1 and 27a+6b+c=0,{a,b,c,d})
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
```

Excel: Lösung mittels *Solver*

B4 ▾ fx =A2+B2+C2+D2

	A	B	C	D
1	a=	b=	c=	d=
2	1,5	-9	13,5	1
3				
4	1. Gleichung	7		
5	2. Gleichung	3,197E-14		
6	3. Gleichung	1		
7	4. Gleichung	9,948E-14		

Mathcad ("Ing. Math 2", Seite 324):

Vorgabe

$a + b + c + d = 7$

$3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 0$

$27a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 1$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = 0$

$$\text{Suchen}(a, b, c, d) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -9 \\ \frac{27}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d &= -2 \\ 3a\,1^2 + 2b\,1 + c &= 0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d &= -2 \\ 3a\,3^2 + 2b\,3 + c &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1/2$; $b = -5/2$; $c = 7/2$; $d = -7/2$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$$y = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{7}{2} \cdot x - \frac{7}{2}$$

f)
$$\begin{aligned} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d &= -2 \\ 3a\,2^2 + 2b\,2 + c &= 0 \\ 6a\,4 + 2b &= 0 \\ 3a\,4^2 + 2b\,4 + c &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1/4$; $b = -3$; $c = 9$; $d = -10$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$$y = \frac{1}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 10$$

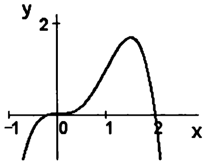
g)
$$\begin{aligned} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 2 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d &= 6 \\ 3a\,2^2 + 2b\,2 + c &= 0 \\ 6a\,2 + 2b &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 1/2$; $b = -3$; $c = 6$; $d = 2$.
Gesuchte Funktionsgleichung:
$$y = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$$

5.30 $y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\cdot x + e$; $y' = 4a\,x^3 + 3b\,x^2 + 2c\cdot x + d$; $y'' = 12a\,x^2 + 6b\cdot x + 2c$;
$y''' = 24a\cdot x + 6b$. Die Koeffizienten a, b, c, und d sind zu bestimmen.

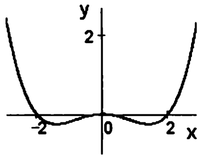
a)
$$\begin{aligned} a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e &= 0 \\ 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d &= 0 \\ 12a\cdot 0^2 + 6b\cdot 0 + 2c &= 0 \\ a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + d\cdot 1 + e &= 1 \\ \underline{12a\cdot 1^2 + 6b\cdot 1 + 2c} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow e = 0; d = 0; c = 0;$
$a = -1; b = 2.$
Funktionsgleichung:
$y = -x^4 + 2x^3$



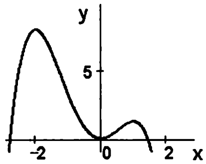
b) Symmetrisch zur y–Achse :
$b = d = 0;$
$$\begin{aligned} a\cdot 0^4 + c\cdot 0^2 + e &= 0 \\ a\cdot 2^4 + c\cdot 2^2 + e &= 0 \\ \underline{a\cdot 4^4 + c\cdot 4^2 + e} &\underline{= 12} \end{aligned}$$

$\Rightarrow e = 0; a = 1/16; c = -1/4;$
Funktionsgleichung:
$$y = \frac{1}{16}\cdot x^4 - \frac{1}{4}\cdot x^2$$



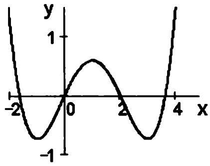
c)
$$\begin{aligned} a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e &= 0 \\ a\cdot(-2)^4 + b\cdot(-2)^3 + c\cdot(-2)^2 + d\cdot(-2) + e &= 8 \\ 4a\cdot(-2)^3 + 3b\cdot(-2)^2 + 2c\cdot(-2) + d &= 0 \\ a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + d\cdot 1 + e &= 5/4 \\ \underline{4a\cdot 1^3 + 3b\cdot 1^2 + 2c\cdot 1 + d} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = -3/4; b = -1;$
$c = 3; d = 0; e = 0.$
Funktionsgleichung:
$$y = -\frac{3}{4}\cdot x^4 - x^3 + 3x^2$$



d)
$$\begin{aligned} a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e &= 0 \\ a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3^2 + d\cdot 3 + e &= -3/4 \\ 4a\cdot 3^3 + 3b\cdot 3^2 + 2c\cdot 3 + d &= 0 \\ a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + d\cdot 1 + e &= 7/12 \\ \underline{4a\cdot 1^3 + 3b\cdot 1^2 + 2c\cdot 1 + d} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow e = 0; a = 1/12; b = -1/3;$
$c = -1/6; d = 1.$
Funktionsgleichung:
$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + x$$



5.31 a) $y' = x + 2$; man sucht nun Funktionen y(x), die abgeleitet als Funktionsterm x + 2 ergeben:
$y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x + c$; Probe: $y' = \frac{1}{2}\cdot 2x + 2 + 0 = x + 2.$

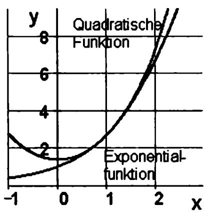
P(2/3): $3 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + c \Rightarrow c = -3.$ Gesuchte Funktion: $y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x - 3$

b) $y' = -4x + 3$; $y = -2x^2 + 3x + c$; P(1/3): $3 = -4\cdot 1 + 3\cdot 1 + c \Rightarrow c = 4.$
Gesuchte Funktion: $y = -2x^2 + 3x + 4$

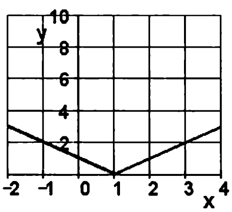
5.32 Da die Extrema von f(x) dort liegen, wo g(x) null ist, kann nur g(x) die Ableitung von f(x) sein.

5.33 $y(x) = e^x$; $y' = e^x$; $y'' = e^x$;
$y(1) = y'(1) = y''(1) = e$;
$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$; $y' = 2a\cdot x + b$; $y'' = 2a$
$$\begin{aligned} a\cdot 1 + b\cdot 1 + 1 &= e \\ 2a\cdot 1 + b &= e \\ \underline{2a} &\underline{= e} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = e/2 = 1{,}359; b = 0;$
$c = e/2 = 1{,}359.$
Gesuchte Funktionsgleichung:
$y = 1{,}359\cdot x^2 + 1{,}359$



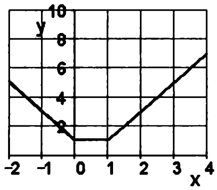
5.34 a) $x-1 < 0$, d.h. $x < 1$:
$|x-1| = -(x-1) = 1-x;$
$x - 1 \geq 0$, d.h. $x \geq 1$: $|x-1| = x-1;$
$$y = \begin{cases} 1-x & \text{für} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Tiefpunkt T(1/0)

5.34 b) $x < 0$: $|x| = -x$; $|x-1| = -(x-1) = 1-x$;
$0 \le x < 1$: $|x| = x$; $|x-1| = -(x-1) = 1-x$;
$x \ge 1$: $|x| = x$; $|x-1| = x-1$;

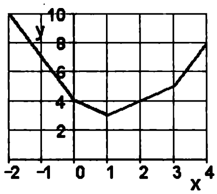
$$y=\begin{cases} 1-2x & \text{für} \quad x<0 \\ 1 & \text{für} \quad 0\le x<1 \\ 2x-1 & \text{für} \quad x\ge 1 \end{cases}$$



Keine *lokalen* Extrema

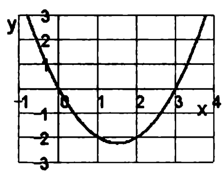
c) $x < 0$: $|x| = -x$; $|x-1| = 1-x$; $|x-3| = 3-x$
$0 \le x < 1$: $|x| = x$; $|x-1| = 1-x$; $|x-3| = 3-x$;
$1 \le x < 3$: $|x| = x$; $|x-1| = x-1$; $|x-3| = 3-x$;
$x \ge 3$: $|x| = x$; $|x-1| = x-1$; $|x-3| = x-3$;

$$y=\begin{cases} 4-3x & \text{für} \quad x<0 \\ 4-x & \text{für} \quad 0\le x<1 \\ 2+x & \text{für} \quad 1\le x<3 \\ 3x-4 & \text{für} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

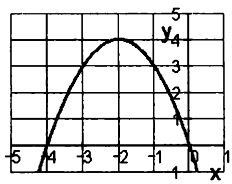


Tiefpunkt: T(1/3)

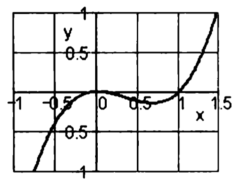
5.35 a) $D = \mathbb{R}$; stetig; $f(-x) = (-x)^2 - 3\cdot(-x) = x^2 + 3x$ ist nicht gleich $f(x)$ oder $-f(x)$, daher ist die Funktion weder gerade noch ungerade;
Nullstellen: $y = x\cdot(x-3) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cdot(x-3) = \infty$;
Extrema und Wendepunkte: $y' = 2x - 3 = 0$; $y'' = 2$;
$y' = 0 \Rightarrow x_3 = 1{,}5$;
$y''(1{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow x_3 = 1{,}5$ ist Minimumstelle; T(1,5/-2,25). Da $y'' \ne 0$ stets, kein Wendepunkt; Parabel mit dem Scheitel T.



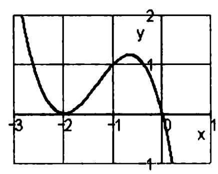
b) $D = \mathbb{R}$, stetig, Funktion weder gerade noch ungerade;
Nullstellen: $y = -(x+2)^2 + 4 = 0$; quadr. Gl. $\Rightarrow$ $x_1 = -4$, $x_2 = 0$;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$;
Extrema und Wendepunkte: $y' = -2x-4$; $y'' = -2$
$y' = 0 \Rightarrow x_3 = -2$; $y''(-2) = -2 < 0 \Rightarrow -2$ ist Maximumstelle;
H(–2/4). Kein Wendepunkt; Parabel mit dem Scheitel H.



c) $D = \mathbb{R}$, stetig, keine Polstellen; weder gerade noch ungerade;
Nullstellen: $y = x^2\cdot(x-1) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2(x-1) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(x-1) = +\infty$;
Extrema und Wendepunkte: $y' = 3x^2 - 2x$; $y'' = 6x-2$; $y''' = 6$
$y' = x\cdot(3x-2) = 0$; Produkt–Null–Satz: $\Rightarrow x_3 = 0$; $x_4 = 2/3 = 0{,}667$
$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow 0$ ist Maximumstelle; H(0/0).
$y''(0{,}667) = 2 > 0 \Rightarrow 0{,}667$ ist Minimumstelle; T(0,667/–0,148). $y'' = 0 \Rightarrow x_5 = 1/3 = 0{,}333$;
$y'''(0{,}333) \ne 0 \Rightarrow 0{,}333$ ist Wendestelle; Wendepunkt W(0,333/–0,074).

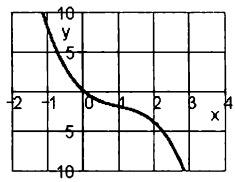


d) $D = \mathbb{R}$, stetig, weder gerade noch ungerade;
Nullst.: $y = -x\cdot(x+2)^2 = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
Extrema/Wendep.: $y' = -(x+2)\cdot(3x+2)$; $y'' = -6x - 8$; $y''' = -6$
$y' = 0 \Rightarrow x_3 = -2$; $x_4 = -2/3 = -0{,}667$;
$y''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow x_3 = -2$ ist Minimumstelle; T(-2/0),



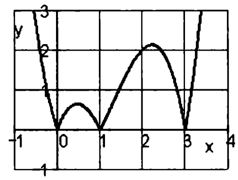
$y''(-0{,}667) = -4 < 0$ $\Rightarrow$ $-0{,}667$ ist Maximumstelle; H(–0,667/1,186);
$y'' = 0 \Rightarrow x_5 = -4/3 = -1{,}333$; $y'''(-1{,}333) = -6 \ne 0 \Rightarrow -1{,}333$ ist Wendest.; W(–1,333/0,593)

5.35 e) $D = \mathbb{R}$, überall stetig, weder gerade noch ungerade;



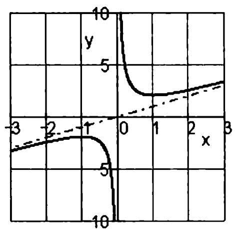
Nullstellen: $y = x\cdot(-x^2+3x-4) = 0$; Produkt–Null–Satz:
$x_1 = 0$; $-x^2+3x-4 = 0$, quadr. Gl., keine reelle Lösung;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(-x^2+3x-4) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
Extrema/Wendepunkte: $y' = -3x^2+6x-4$; $y'' = 6-6x$; $y''' = -6$;
$y' = 0 \Rightarrow$ keine Lösung, daher keine lokalen Extrema;
$y'' = 0 \Rightarrow x_2 = 1$; $y'''(1) = -6 \neq 0 \Rightarrow 1$ ist Wendest.; W(1/-2)

f) Wir untersuchen zuerst die Funktion $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.



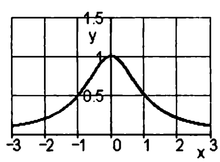
$D = \mathbb{R}$, stetig, weder gerade noch ungerade;
Nullstellen: $y = x\cdot(x^2-4x+3) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0$ sowie $x^2-4x+3 = 0$, daraus $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; die Funktion wechselt ihr Vorzeichen an allen drei Nullstellen, für $x < 0$ ist f(x) negativ, für $0 < x < 1$ positiv, für $1 < x < 3$ wieder negativ und für $x > 3$ wieder positiv.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(x^2-4x+3) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Extrema/Wendepunkte: $y' = 3x^2 - 8x + 3$; $y'' = 6x-8$; $y''' = 6$
$y' = 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}451$; $x_5 = 2{,}215$;
$y''(0{,}451) = -5{,}29 < 0 \Rightarrow 0{,}451$ ist Maximumstelle; H(0,451/0,631);
$y''(2{,}215) = 5{,}29 > 0 \Rightarrow 2{,}215$ ist Minimumstelle; T(2,215/-2,113);
$y'' = 0 \Rightarrow x_6 = 4/3 = 1{,}333$; $y'''(1{,}333) = 6 \neq 0 \Rightarrow 1{,}333$ ist Wendestelle; W(1,333/-0,741)
Betrachtet man |f(x)|, so sind die Graphenteile von f(x), die unterhalb der x-Achse verlaufen, an der x-Achse zu spiegeln. Entsprechend wird der Tiefpunkt T von f(x) zu einem zweiten Hochpunkt H_2(2,215/2,113); die Schnittpunkte des Graphen von f(x) mit der x-Achse werden zu Tiefpunkten der Funktion |f(x)|: T_1(0/0), T_2(1/0) und T_3(3/0). Der Wendpunkt W bleibt unverändert. Weiters: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

5.36 a) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, Polstelle: 0, stetig; die Funktion ist *ungerade*, da



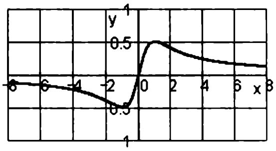
$f(-x) = -x + 1/(-x) = -[x + 1/x] = -f(x)$;
Nullstellen: $y = x + 1/x = (x^2+1)/x \neq 0$ für alle x, daher keine Nullstelle;
$y = \frac{1}{x} + x \Rightarrow$ Asymptote: $y = x$; ebenfalls ist $x = 0$, also die y–Achse, Asymptote (da 0 Polstelle ist);
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;
Extrema/Wendepunkte: $y' = 1-1/x^2$; $y'' = 2/x^3$; $y''' = -6/x^4$
$y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 1$; $y''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow -1$ ist Maximumstelle, H(-1/-2);
$y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow 1$ ist Minimumstelle, T(1/2); $y'' = 0$ nicht erfüllbar; daher kein Wendepunkt

b) $D = \mathbb{R}$, keine Polstellen, stetig; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, daher liegt eine *gerade* Funktion vor. Keine Nullstelle.



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y = 0$;
Extr./Wendep.: $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \frac{2\cdot(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$; $y''' = \frac{-24x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$;
$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow 0$ ist Maximumstelle, H(0/1);
$y'' = 0$, $3x^2-1 = 0 \Rightarrow x_2 = -0{,}577$; $x_3 = 0{,}577$; $y'''(-0{,}577) = -2{,}92 \neq 0$,
$y'''(0{,}577) = 2{,}92 \neq 0 \Rightarrow -0{,}577$ und $0{,}577$ Wendestellen, W_1(-0,577/0,75), W_2(0,577/0,75)

5.36 c) $D = \mathbb{R}$, keine Polstellen, stetig; Funktion *ungerade*, weil



$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x).$$

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x}{1+1/x^2} = 0, \text{ Asymptote: } y = 0;$$

Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$; $y''' = \dfrac{6\cdot(-x^4+6x^2-1)}{(x^2+1)^4}$;

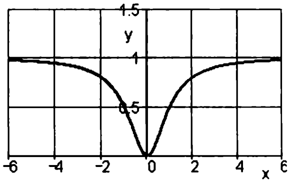
$y' = 0$, d.h. $1-x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1, x_3 = 1$; $y''(-1) = 0{,}5 > 0 \Rightarrow -1$ ist Min.stelle, T(−1/−0,5);

$y''(1) = -0{,}5 < 0 \Rightarrow 1$ ist Maximumstelle, H(1/0,5);

$y'' = 0$, Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_4 = 0, x_5 = -\sqrt{3} = -1{,}732,\ x_6 = \sqrt{3} = 1{,}732$;

$y'''(0) = -6 \neq 0$, $y'''(-1{,}732) = y'''(1{,}732) = 0{,}188 \neq 0$, 0, −1,732 und 1,732 sind Wendestellen, $W_1(0/0)$, $W_2(-1{,}732/-0{,}433)$, $W_3(1{,}732/0{,}433)$

d) $D = \mathbb{R}$, stetig; keine Polstellen, Funktion *gerade*, weil



$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x).$$

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;

$x^2 : (x^2+1) = -\dfrac{1}{x^2+1} + 1 \Rightarrow$ Asymptote: $y = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

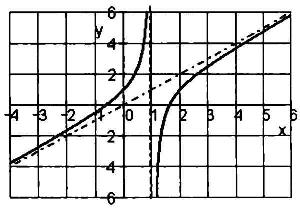
Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2\cdot(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$; $y''' = \dfrac{24\cdot x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$;

$y' = 0 \Rightarrow x_2 = 0$; $y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow 0$ ist Minimumstelle, T(0/0);

$y'' = 0$, $1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_3 = -0{,}577$; $x_4 = 0{,}577$;

$y'''(-0{,}577) = 2{,}92 \neq 0$ sowie $y'''(0{,}577) = -2{,}92 \neq 0 \Rightarrow x_3 = -0{,}577$ und $x_4 = 0{,}577$ sind Wendestellen, $W_1(-0{,}577/0{,}25)$, $W_2(0{,}577/0{,}25)$.

e) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; da 1 Nullstelle des Nenners, nicht aber zugleich Nullstelle des Zählers ist; ist 1 Polstelle. Funktion in D stetig, weder gerade noch ungerade.



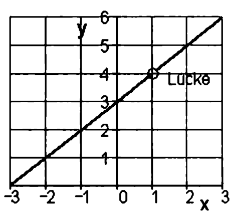
Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}618$; $x_2 = 1{,}618$;

$(x^2-x-1) : (x-1) = -\dfrac{1}{x-1} + x \Rightarrow$ Asymptote $y = x$; ebenfalls ist die Gerade $x = 1$ Asymptote (da 1 Polstelle ist);

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x-1}+x\right) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty.$$

Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$; $y'' = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$; $y' = 0$, $x^2-2x+2 = 0 \Rightarrow$ keine reellen Lösungen, daher kein lokales Extremum; $y'' = 0$ nicht erfüllbar $\Rightarrow$ kein Wendepunkt.

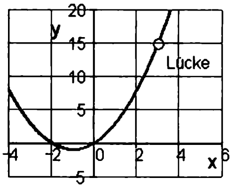
f) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. 1 ist einfache Nullstelle des Nenners und *zugleich* des Zählers: $y(1) = 0$; daher ist die Definitionslücke 1 *keine* Polstelle. An der Stelle 1 besitzt der Graph eine Lücke.



$y = (x^2 - x - 1) : (x-1) = x + 3$; Funktion in D stetig; weder gerade noch ungerade. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;

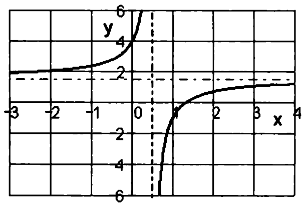
Nullstellen: $y = 0$; $x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$. Da der Funktionsgraph eine Gerade mit einer Lücke ist, gibt es kein lokales Extremum und auch keinen Wendepunkt.

5.36 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. 3 ist einfache Nullstelle des Nenners und *zugleich* des Zählers: daher ist die Definitionslücke 3 *keine* Polstelle. An der Stelle 3 besitzt der Funktionsgraph eine Lücke.



$y = (x^3 - x^2 - 6x) : (x-3) = x^2 + 2x$;
Funktion in D stetig, weder gerade noch ungerade.
Nullstellen: $y = x\cdot(x+2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cdot(x+2) = \infty$.
Extrema/Wendestellen: $y' = 2x + 2$, $y'' = 2$;
$y' = 0 \Rightarrow x_3 = -1$; $y''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow -1$ ist Max.stelle, T(-1/-1); kein Wendepunkt.

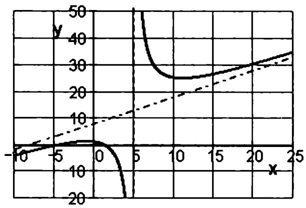
h) $D = \mathbb{R}\setminus\{0{,}5\}$. 0,5 ist Nullstelle des Nenners und nicht zugleich Nullstelle des Zählers; daher ist 0,5 Polstelle.
Funktion in D stetig, weder gerade noch ungerade.
Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 4/3$.



$f(x) = (3x-4) : (2x-1) = \dfrac{-5}{2(2x-1)} + \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$ ist Asymptote; ebenfalls ist die Gerade $x = \dfrac{1}{2}$ Asymptote (da 0,5 Polstelle ist); $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0{,}5$

Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{5}{(2x-1)^2}$; $y'' = \dfrac{-20}{(2x-1)^3}$; $y' = 0$ nicht möglich, daher kein lokales Extremum. Ebenfalls ist $y'' = 0$ nicht möglich, daher auch kein Wendepunkt.

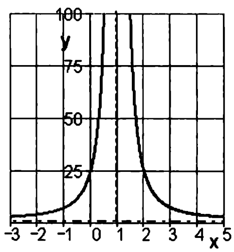
i) $D = \mathbb{R}\setminus\{5\}$. 5 ist Nullstelle des Nenners und nicht zugleich Nullstelle des Zählers; daher ist 5 Polstelle. Funktion in D stetig, weder gerade noch ungerade.



Nullstellen: $y = 0$, $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$, $x_2 = 1$. $f(x) = (x^2 + 3x - 4) : (x-5) = \dfrac{36}{x-5} + x + 8 \Rightarrow y = x+8$ ist Asymptote; ebenfalls ist die Gerade $x = 5$ Asymptote (da 5 Polstelle ist);
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;

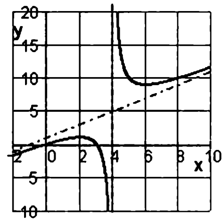
Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{x^2-10x-11}{(x-5)^2}$; $y'' = \dfrac{72}{(x-5)^3}$;
$y' = 0$, $x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 11$; $y''(-1) = -1/3 < 0 \Rightarrow -1$ ist Maximumstelle, H(-1/1); $y''(11) = 1/3 > 0 \Rightarrow$ 11 ist Minimumstelle, T(11/25).
Da $y'' = 0$ nicht möglich, gibt es keinen Wendepunkt.

j) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. 1 ist Nullstelle des Nenners und nicht zugleich Nullstelle des Zählers; daher ist 1 Polstelle. Die Funktion ist stetig in D, weder gerade noch ungerade.



Nullstellen: $y = 0$, $x^2 - 2x + 25 = 0$, quadratische Gleichung, keine reelle Lösung, daher keine Nullstelle.
$f(x) = (x^2 - 2x + 25) : (x^2 - 2x + 1) = \dfrac{24}{x^2-2x+1} + 1 \Rightarrow y = 1$ ist Asymptote; ebenfalls ist die Gerade $x = 1$ Asymptote (da 1 Polstelle ist); $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{-48}{(x-1)^3}$; $y'' = \dfrac{144}{(x-1)^4}$;
$y' = 0$ sowie $y'' = 0$ nicht möglich, daher kein lokales Extremum und kein Wendepunkt.

5.36 k) $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$. 4 ist Nullstelle des Nenners und nicht zugleich Nullstelle des Zählers; daher ist 4 Polstelle. Die Funktion ist stetig in D, weder gerade noch ungerade.



Nullstellen: $y = 0$, $x\cdot(x-3) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

$f(x) = x\cdot(x-3) : (x-4) = \dfrac{4}{x-4} + x + 1 \Rightarrow$ Asymptote $y = x+1$;

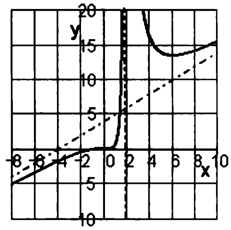
ebenfalls ist die Gerade $x = 4$ Asymptote (da 4 Polstelle ist).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$; $y'' = \dfrac{8}{(x-4)^3}$;

$y' = 0$, $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$, $x_4 = 6$; $y''(2) = -1 < 0 \Rightarrow 2$ ist Maximumstelle, H(2/1);
$y''(6) = 1 > 0 \Rightarrow 6$ ist Minimumstelle, T(6/9). Da $y'' = 0$ nicht möglich, kein Wendepunkt.

l) $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, 2 ist Nullstelle des Nenners und nicht zugleich Nullstelle des Zählers; daher ist 2 Polstelle. Die Funktion ist stetig in D, weder gerade noch ungerade.



Nullstellen: $y = 0$, $x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;

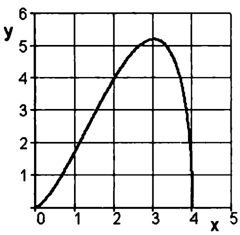
$f(x) = x^3 : (x-2)^2 = x^3 : (x^2 - 4x + 4) = \dfrac{12x-16}{(x-2)^2} + x + 4 \Rightarrow$

Asymptote $y = x + 4$; ebenfalls ist die Gerade $x = 2$ Asymptote (da 2 Polstelle ist). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{x^2\cdot(x-6)}{(x-2)^3}$; $y'' = \dfrac{24x}{(x-2)^4}$; $y''' = \dfrac{-24\cdot(3x+2)}{(x-2)^5}$;

$y' = 0$, $x^2\cdot(x-6) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow x_2 = 0$, $x_3 = 6$;
$y''(0) = 0 \Rightarrow$ noch keine Entscheidung möglich;
$y''(6) = 0{,}5625 > 0 \Rightarrow 6$ ist Minimumstelle, T(6/13,5)
$y'' = 0$, $24\cdot x = 0 \Rightarrow x_4 = 0$; $y'''(0) = 1{,}5 \neq 0 \Rightarrow 0$ ist Wendestelle; da dort die Steigung null ist, liegt ein Sattelpunkt vor: S(0/0)

5.37 a) Definitionsbereich: $4x - x^2 = x\cdot(4-x)$ muss ≥ 0 sein. Dies ist der Fall zwischen 0 und 4: $D = [0,4]$.
Funktion stetig, weder gerade noch ungerade.



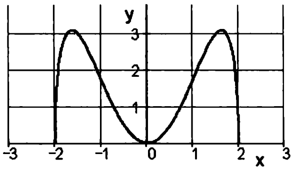
Nullstellen: $y = x\cdot\sqrt{x\cdot(4-x)} = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Extrema/Wendepunkte:

$y' = \dfrac{6x-2x^2}{\sqrt{x\cdot(4-x)}}$; $y'' = \dfrac{-2x^2+12x-12}{(x-4)\cdot\sqrt{x\cdot(4-x)}}$; $y''' = \dfrac{-24}{x\cdot(x-4)^2\cdot\sqrt{x\cdot(4-x)}}$;

$y' = 0$; $6x - 2x^2 = 2x\cdot(3-x) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow x_3 = 3$; $x_4 = 0$ ist als Randstelle kein Kandidat für ein *lokales* Extremum. Randextrema: $T_1(0/0)$, $T_2(4/0)$.
$y''(3) = -3{,}46 < 0 \Rightarrow 3$ ist Maximumstelle, H(3/5,196).
$y'' = 0$, $-2x^2 + 12x - 12 = 0 \Rightarrow x_5 = 1{,}268$; $x_6 = 4{,}732$ liegt nicht in D;
$y'''(1{,}268) = -1{,}36 \neq 0 \Rightarrow 1{,}268$ ist Wendestelle, W(1,268/2,360)

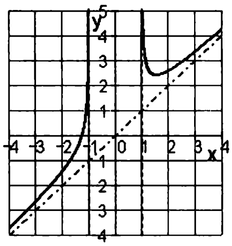
5.37 b) $4-x^2 \geq 0$ für $x^2 \leq 4$ oder $-2 \leq x \leq 2$, $D = [-2\,,2]$.
Die Funktion ist stetig; sie ist gerade, weil
$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt{4-(-x)^2} = x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} = f(x)$.
Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$;
Extrema/Wendepunkte:



$$y' = \frac{8x-3x^3}{\sqrt{4-x^2}};\quad y'' = \frac{6x^4-36x^2+32}{(4-x^2)^{3/2}};\quad y''' = \frac{-6x^5+60x^3-192x}{(4-x^2)^{5/2}};$$

$y' = 0$, $8x-3x^3 = x\cdot(8-3x^2) = 0 \Rightarrow x_4 = 0; x_5 = -1{,}63; x_6 = 1{,}63$; $y''(0) > 0 \Rightarrow T(0/0)$;
$y''(1{,}63) < 0 \Rightarrow H_1(1{,}63/3{,}08)$; $y''(-1{,}63) < 0 \Rightarrow H_2(-1{,}63/3{,}08)$;
$y'' = 0 \Rightarrow 6x^4 - 36x^2 + 32 = 0$; Substitution: $u = x^2$; $6u^2 - 36\,u + 32 = 0 \Rightarrow u_1 = 1{,}085$;
$u_2 = 4{,}915$; $x^2 = 1{,}085 \Rightarrow x_{7,8} = \pm\sqrt{u_1} = \pm\,1{,}04$; $x_{8,9} = \pm\sqrt{u_2} = 2{,}217$ führt auf x–Werte außerhalb D. $y'''(-1{,}04) \neq 0$, $y'''(1{,}04) \neq 0 \Rightarrow W_1(-1{,}04/1{,}85)$, $W_2(1{,}04/1{,}85)$,

c) $x^2 - 1 > 0$, d.h. $x < -1$ oder $x > 1$, $D = \mathbb{R}\setminus[-1,\,1]$. Funktion stetig, weder gerade noch ungerade.



Nullstellen: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x = 0$, $1 = x\cdot\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x_1 = -\,1{,}27$;

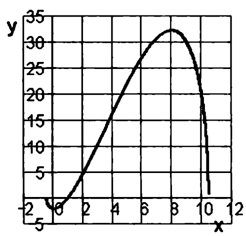
$\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$;

Asymptoten: $y = x$, $x = -1$, $x = 1$;

Extrema/Wendepunkte: $y' = 1 - \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$; $y'' = \dfrac{2x^2+1}{\left(x^2-1\right)^{5/2}}$;

$y' = 0$, $(x^2-1)^{3/2} = x$; Lösung durch gezieltes Probieren oder mit Rechnersoftware: $x_2 = 1{,}52$;
$y''(x_2) > 0 \Rightarrow T(1{,}52/2{,}39)$; $y'' = 0$, $2x^2 + 1 = 0$ reell nicht erfüllbar $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

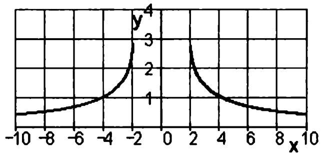
d) $5 + 10x - x^2 \geq 0$; $5+10x-x^2 = 0$ für $x_1 = -0{,}48$ und $x_2 = 18{,}48$;
dazwischen ist $5 + 10x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D = [-\,0{,}48;\ 10{,}58]$. Funktion stetig, weder gerade noch ungerade.
Nullstellen: $x_1 = -0{,}48$; $x_2 = 10{,}58$; $x_3 = 1$
Extrema/Wendepunkte:



$$y' = \frac{16x-2x^2}{\sqrt{5+10x-x^2}};\quad y'' = \frac{2x^3-30x^2+60x+80}{(5+10x-x^2)^{3/2}};\quad y''' = \frac{-360x-900}{(5+10x-x^2)^{5/2}};$$

$y' = 0$; $2x\cdot(8-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 8$;
$y''(0) > 0 \Rightarrow T(0/\text{-}2{,}24)$, $y''(8) < 0 \Rightarrow H(8/32{,}1)$;
$y'' = 0$, $2x^3 - 30x^2 + 60x + 80 = 0$; Lösung durch gezieltes Probieren oder mit Rechnersoftware $\Rightarrow x_4 = -0{,}90$; $x_5 = 3{,}61$; $x_6 = 12{,}30$; nur $x_5 = 3{,}61$ liegt in D; $y'''(3{,}61) \Rightarrow W(3{,}61/13{,}8)$

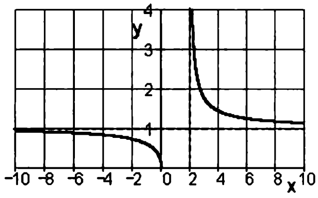
e) $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus]-2,\,2[$. stetig; Funktion stetig und *gerade*. Nullstellen: $y = 0$; $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2-4}$;
$x^2 + 4 = x^2 - 4$, keine Lösungen $\Rightarrow$ keine Nullstellen;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y = 0$;



Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$; $y'' = \dfrac{4}{\left(x^2+4\right)^{3/2}} + \dfrac{4}{\left(x^2-4\right)^{3/2}}$;

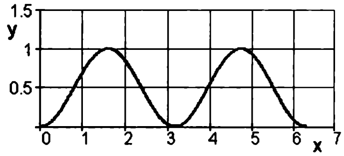
$y' = 0$; $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$; $x\cdot\sqrt{x^2+4} = x\cdot\sqrt{x^2-4}$; $x^4+4x^2 = x^4-4x^2$; $8x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, nicht im Definitionsbereich D; Randextrema: $H_1(-2/2{,}83)$; $H_2(2/2{,}83)$;
$y'' = 0$ nicht möglich $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

5.37 f) $x/(x-2) \geq 0 \Rightarrow$ (1) $x \geq 0$ und $x > 2$, also $x > 2$ sowie
(2) $x \leq 0$ und $x - 2 < 0$, also $x \leq 0$;
kurz: $D = \mathbb{R}\setminus]0, 2]$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \infty$,
Funktion stetig, weder gerade noch ungerade.
Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, Asymptote: $y = 1$ sowie die Gerade $x = 2$;



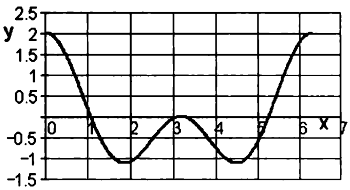
Extrema/Wendepunkte: $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$; $y'' = \dfrac{2x-1}{x\cdot(x-2)^3}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$;
$y' = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, nicht in D $\Rightarrow$ kein lokales Extremum, jedoch T(0/0) als Randextremum;
$y'' = 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}5$; $x_3 = 2$; beide Werte nicht in D $\Rightarrow$ kein Wendepunkt.

5.38 a) $D = [0, 2\pi]$; Funktion stetig, stets positiv oder null.
Nullstellen: $y = 0$; $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$;
Extrema/Wendepunkte:
$y' = \sin(2x)$; $y'' = 2\cdot\cos(2x)$; $y''' = -4\cdot\sin(2x)$
$y' = 0 \Rightarrow 2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$; $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$;



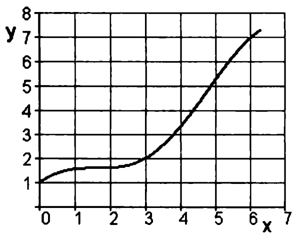
$y''(0) > 0 \Rightarrow T_1(0/0)$, $y''(\pi/2) < 0 \Rightarrow H_1\left(\frac{\pi}{2}/1\right)$, $y''(\pi) > 0 \Rightarrow T_2(\pi/0)$, $y''(3\pi/2) < 0 \Rightarrow H_2\left(\frac{3\pi}{2}/1\right)$,
$y''(2\pi) > 0 \Rightarrow T_3(2\pi/0)$; T_1 und T_3 sind eigentlich Randextrema (da am Rand des Definitionsbreichs liegend) und keine lokalen Extrema.
$y'' = 0 \Rightarrow 2x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2$; $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$; $y'''(\pi/4) \neq 0 \Rightarrow W_1\left(\frac{\pi}{4}/\frac{1}{2}\right)$,
$y'''(3\pi/4) \neq 0 \Rightarrow W_2\left(\frac{3\pi}{4}/\frac{1}{2}\right)$, $y'''(5\pi/4) \neq 0 \Rightarrow W_3\left(\frac{5\pi}{4}/\frac{1}{2}\right)$, $y'''(7\pi/4) \neq 0 \Rightarrow W_4\left(\frac{7\pi}{4}/\frac{1}{2}\right)$

b) $D = [0, 2\pi]$; Funktion stetig.
Nullstellen: $\cos(2x) + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$
$\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + \cos x = 0$; $u = \cos x$;
$2u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0{,}5$; $u_2 = -1$;
$\cos x = 0{,}5 \Rightarrow x_1 = \pi/3$; $x_2 = 5\pi/3$; $\cos x = -1 \Rightarrow x_3 = \pi$;
Extrema/Wendepunkte:
$y' = -2\cdot\sin(2x) - \sin x$; $y'' = -4\cos(2x) - \cos x$;
$y''' = 8\cdot\sin(2x) + \sin x$;

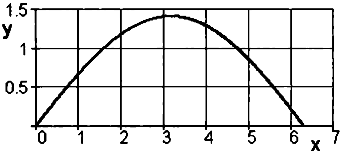


$y' = -4\cdot\sin x\cdot\cos x - \sin x = 0$; $\sin x\cdot(-4\cos x - 1) = 0$; Produkt–Null–Satz:
$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$; $-4\cos x - 1 = 0$; $\cos x = -0{,}25 \Rightarrow x = 1{,}823$; $4{,}460$;
$y''(0) < 0 \Rightarrow H_1(0/2)$, $y''(\pi) < 0 \Rightarrow H_2(\pi/0)$; $y''(2\pi) < 0 \Rightarrow H_3(2\pi/2)$;
$y''(1{,}823) \Rightarrow T_1(1{,}823/-1{,}125)$, $y''(4{,}460) \Rightarrow T_2(4{,}460/-1{,}125)$; H_1 und H_3 sind Randextrema;
$y'' = -4\cos(2x) - \cos x = -4\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0$, $-8\cdot\cos^2 x - \cos x + 4 = 0$, $u = \cos x$
usw. $\Rightarrow \cos x = -0{,}772$; $x = 2{,}453$; $3{,}830$ bzw. $\cos x = 0{,}647$; $x = 0{,}887$, $x = 5{,}417$;
Wendestellen, weil dort $y''' \neq 0$: $W_1(0{,}867/0{,}486)$, $W_2(2{,}453/-0{,}579)$, $W_3(3{,}830/-0{,}579)$, $W_4(5{,}417/0{,}486)$

c) $D = [0, 2\pi]$; stetige Funktion.
Nullstellen: $y = 0$ in D nicht möglich, da $\cos x$ nur zwischen $\pi/2 = 1{,}58$ und $3\pi/2 = 4{,}71$ negativ ist und dies nur bis -1 möglich ist. Extrema/Wendepunkte:
$y' = 1 - \sin x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \sin x$;
$y' = 0 \Rightarrow x = \pi/2$; $y''(\pi/2) = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung;
$y'' = 0 \Rightarrow x = \pi/2 = 1{,}58$, $3\pi/2 = 4{,}71$;
$y'''(1{,}58) \neq 0 \Rightarrow 1{,}58$ ist Wendestelle; da hier Steigung null ist, liegt ein Sattelpunkt vor: $S(1{,}58/1{,}58)$
$y''(4{,}71)) \neq 0 \Rightarrow W(4{,}71/4{,}71)$



5.38 d) $D = [0, 2\pi]$; Funktion stetig, stets positiv oder null;
Nullstellen: $y = 0$; $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$;
Extrema/Wendepunkte:



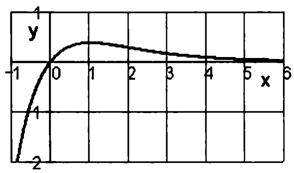
$$y' = \frac{\sin x}{2\cdot\sqrt{1-\cos x}};\ y'' = -\frac{1}{4}\cdot\sqrt{1-\cos x},\ y''' = \frac{-\sin x}{8\cdot\sqrt{1-\cos x}}$$

$y' = 0$, $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi; 2\pi$; da aber für $x = 0$ sowie für $x = 2\pi$ auch der Nenner $\sqrt{1-\cos x}$ null ist, muss dort nicht y‘ gleich null sein! Regel von de l‘Hospital: $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2\cdot\sqrt{1-x}} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\cos x}{-\sin x/\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entsprechend gilt am rechten Rand: $\lim\limits_{x\to 2\pi-} \frac{\sin x}{2\cdot\sqrt{1-x}} = "\frac{0}{0}" = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

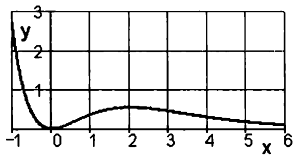
$y''(\pi) = -0{,}354 < 0 \Rightarrow H(\pi/\sqrt{2})$. An den Stellen $x = 0$ und $x = 2\pi$ befindet sich jedoch jeweils ein Randminimum: $T_1(0/0)$, $T_2(2\pi/0)$.
$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi$; dies sind jedoch die Randstellen von D. Wendestellen sind jedoch im *Inneren* eines Definitionsbereichs definiert; daher kein Wendepunkt in D.

5.39 a) $D = \mathbb{R}$; stetig; weder gerade noch ungerade;
Nullstelle: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Regel von de l'Hospital);
Asymptote: $y = 0$ (x-Achse);
Extrema/Wendepunkte:



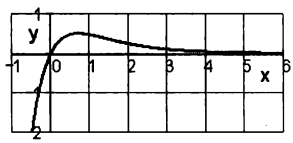
$y' = (1-x)\cdot e^{-x}$; $y'' = (x-2)\cdot e^{-x}$; $y''' = (x-3)\cdot e^{-x}$; $y' = 0$; $1-x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$;
$y''(1) < 0 \Rightarrow H(1/0{,}368)$, $y'' = 0$; $2-x = 0 \Rightarrow x_3 = 2$; $y'''(2) \neq 0 \Rightarrow W(2/0{,}271)$.

b) $D = \mathbb{R}$; stetig; weder gerade noch ungerade;
Nullstelle: $y = 0$; $x_1 = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Regel von de l'Hospital);
Asymptote: $y = 0$ (x-Achse);
Extrema/Wendepunkte:



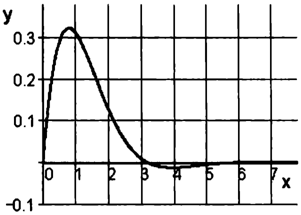
$y' = (2x - x^2)\cdot e^{-x}$; $y'' = (x^2 - 4x + 2)\cdot e^{-x}$; $y''' = (-x^2 + 6x - 6)\cdot e^{-x}$
$y' = 0$; $x\cdot(2-x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $y''(0) > 0 \Rightarrow T(0/0)$; $y''(2) < 0 \Rightarrow H(2/0{,}541)$,
$y'' = 0$, $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}586$; $x_5 = 3{,}414$; $y'''(0{,}586) \neq 0 \Rightarrow W_1(0{,}586/0{,}191)$,
$y'''(3{,}414) \neq 0 \Rightarrow W_2(3{,}414/0{,}384)$.

c) $D = \mathbb{R}$; stetig; weder gerade noch ungerade;
Nullstelle: $y = 0$, $e^{-x} = e^{-2x}$; Multiplikation mit e^{2x} ergibt
$e^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
Asymptote: $y = 0$ (x-Achse);



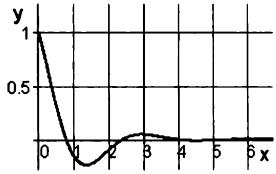
Extrema/Wendepunkte: $y' = -2\cdot\left(e^x - 2\right)\cdot e^{-2x}$; $y'' = 2\cdot\left(e^x - 4\right)\cdot e^{-2x}$; $y''' = -2\cdot\left(e^x - 8\right)\cdot e^{-2x}$;
$y' = 0$; $e^x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \ln 2 = 0{,}693$; $y''(0{,}693) < 0 \Rightarrow H(0{,}693/0{,}5)$;
$y'' = 0$, $e^4 = 4 \Rightarrow x_3 = \ln 4 = 1{,}386$; $y''(1{,}386) \neq 0 \Rightarrow W(1{,}386/0{,}375)$

5.39 d) $D = [0, \infty[$; stetige Funktion.



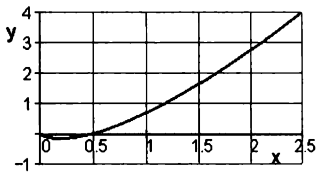
Nullstellen: $y = 0$, $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; Extrema/Wendepunkte:
$y' = e^{-x}\cdot(\cos x - \sin x)$; $y'' = -2\cdot e^{-x}\cdot\cos x$;
$y''' = 2\cdot(\cos x + \sin x)\cdot e^{-x}$;
$y' = 0$; $\cos x - \sin x = 0$; $\tan x = 1 \Rightarrow$
$x = 0{,}785; 3{,}927; 7{,}069; 10{,}21$; usw.
$y''(0{,}785) < 0 \Rightarrow H_1(0{,}785/0{,}322)$; $y''(3{,}927) > 0 \Rightarrow T_1(3{,}927/\text{-}0{,}014)$; $y''(7{,}069) < 0 \Rightarrow$ $H_2(7{,}069/0{,}00060)$; $y''(10{,}21) > 0 \Rightarrow T(10{,}21/-0{,}000026)$
$y'' = 0$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = 1{,}571; 4{,}712; 7{,}854$ usw. $\pm\pi$, $y''' \neq 0 \Rightarrow W_1(1{,}571/0{,}208)$; $W_2(4{,}712/-0{,}00898)$, usw.

e) $D = [0, \infty[$; stetige Funktion;



Nullstellen: $\cos(2x) = 0$; $2x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$
$x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, \ldots$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
Extrema/Wendepunkte: $y' = -e^{-x}\cdot[\cos(2x) + 2\cdot\sin(2x)]$;
$y'' = e^{-x}\cdot[4\cdot\sin(2x) - 3\cos(2x)]$;
$y''' = e^{-x}\cdot[11\cdot\cos(2x) + 2\cdot\sin(2x)]$;
$y' = 0$, $\cos(2x) + 2\cdot\sin(2x) = 0$; $\tan(2x) = -0{,}5 \Rightarrow 2x = -0{,}464 + \pi = 2{,}678; 5{,}820; 8{,}961; 12{,}10$ usw.; $x = 1{,}339; 2{,}910; 4{,}481; 6{,}051$ usw.; $y'' > 0 \Rightarrow T_1(1{,}339/\text{-}0{,}234)$; $T_2(4{,}481/-0{,}010)$;
$y'' < 0 \Rightarrow H_1(2{,}910/0{,}049)$; $H_2(6{,}051/0{,}0021)$; ...
$y'' = 0$, $4\cdot\sin(2x) - 3\cos(2x) = 0$; $\tan(2x) = 0{,}75 \Rightarrow 2x = 0{,}644; 3{,}785; 6{,}927; \ldots$;
$x = 0{,}322; 1{,}893; 3{,}463; \ldots$; $y''' \neq 0 \Rightarrow W_1(0{,}322/0{,}580)$; $W_2(1{,}893/-0{,}120)$; $W_3(3{,}463/0{,}025)$

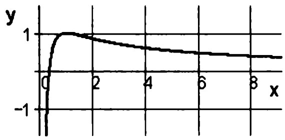
f) $D =]0, \infty[$; stetige Funktion.



Nullstellen: $y = 0$; $x_1 = 0$ liegt nicht in D;
$\ln(2x) = 0$; $e^{\ln(2x)} = e^0$; $x_2 = 0{,}5$.
$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{\ln(2x)}{1/x} = \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$ (Regel von de l'Hospital), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;

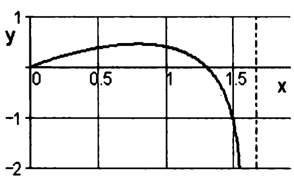
Extrema/Wendepunkte: $y' = 1 + \ln(2x)$; $y'' = 1/x$; $y''' = -1/x^2$
$y' = 0$; $\ln(2x) = -1$; $e^{\ln(2x)} = e^{-1} \Rightarrow x_3 = 0{,}184$; $y''(0{,}184) > 0 \Rightarrow T(0{,}184/\text{-}0{,}184)$;
$y'' = 0$ nicht möglich $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

g) $D =]0, \infty[$; stetige Funktion.



Nullstellen: $y = 0$; $1 + \ln x = 0 \Rightarrow x_1 = 1/e = 0{,}368$;
$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Regel von de l'Hospital);
Extrema/Wendepunkte:
$y' = -\ln x/x^2$; $y'' = (2\cdot\ln x - 1)/x^3$; $y''' = (5 - 6\cdot\ln x)/x^4$;
$y' = 0$; $\ln x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$; $y''(1) < 0 \Rightarrow H(1/1)$;
$y'' = 0$; $2\cdot\ln x = 1 \Rightarrow x_3 = 1{,}649$; $y''' \neq 0 \Rightarrow W(1{,}649/0{,}910)$

h) $D = [0, \pi/2[$; stetige Funktion.



Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x_1 = 1{,}293$ (Lösung durch gezieltes Probieren oder Rechnersoftware);
$\lim\limits_{x\to\pi/2-} f(x) = -\infty$; Asymptote $x = \pi/2$;
Extrema/Wendepunkte: $y' = 1 - \tan x$; $y'' = -1/\cos^2 x$;
$y' = 0 \Rightarrow x_2 = \pi/4 = 0{,}785$; $y''(0{,}785) < 0 \Rightarrow H(0{,}785/0{,}439)$,
$y'' = 0$ nicht möglich $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

5.40 a) $y' = 2x;\ y'' = 2;\ \ P_1(1/1):\ y' = 2; y'' = 2;\ \kappa = \dfrac{2}{(1+4)^{3/2}} = 0{,}179;$

$P_2(2/4): \kappa = \dfrac{2}{(1+16)^{3/2}} = 0{,}0285$

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2}; y'' = \dfrac{2}{x^3};\ \ P_1(1/1):\ y' = -1; y'' = 2;\ \kappa = \dfrac{2}{(1+1)^{3/2}} = 0{,}707;$

$P_2\left(2/\dfrac{1}{2}\right):\ y' = -\dfrac{1}{4}; y'' = \dfrac{1}{4}; \kappa = \dfrac{1/4}{(1+1/16)^{3/2}} = 0{,}228$

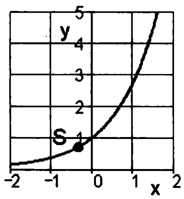
c) $y' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}};\ y'' = -\dfrac{1}{4\cdot x^{3/2}};\ P_1(1/1): y' = \dfrac{1}{2};\ y'' = -\dfrac{1}{4};\ \kappa = -\dfrac{1/4}{(1+1/4)^{3/2}} = -0{,}179;$

$P_2(2/\sqrt{2}):\ y' = 0{,}354;\ y'' = -0{,}088;\ \kappa = -0{,}074$

d) Da $y'' = 0$, ist bei einer Geraden für alle Punkte $\kappa = 0$.

5.41 $y' = \cos x; y'' = -\sin x;\ \ x = \dfrac{\pi}{2}:\ y = 1;\ y' = 0; y'' = -1;\ \kappa = \dfrac{-1}{(1+0)^{3/2}} = -1$

5.42 a) Im Scheitel hat die Krümmung ein Extremum..

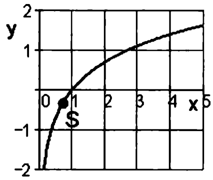


$y' = e^x; y'' = e^x;\ \kappa(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{3/2}};\ \ \kappa'(x) = \dfrac{e^x\cdot\left(1-2\cdot e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^{5/2}} = 0;$

$\kappa'' = \dfrac{4\cdot e^{5x} - 10\cdot e^{3x} + e^x}{(1+e^{2x})^{7/2}};\ \kappa' = 0,\ 1-2\cdot e^{2x} = 0 \Rightarrow$

$x = 0{,}5\cdot\ln 0{,}5 = -0{,}347;\ \kappa''(-0{,}347) < 0 \Rightarrow -0{,}347$ ist Maximumstelle; Scheitel $S(-0{,}347/0{,}707)$; $\kappa = 0{,}385$; $r = 2{,}60$

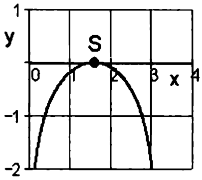
b) $y' = \dfrac{1}{x};\ y'' = -\dfrac{1}{x^2};\ \ \kappa(x) = \dfrac{-1/x^2}{\left(1+1/x^2\right)^{3/2}} = -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}};$



$\kappa' = \dfrac{2x^2-1}{\left(x^2+1\right)^{5/2}};\ \kappa'' = \dfrac{9x-6x^3}{\left(x^2+1\right)^{7/2}};\ \kappa' = 0,\ 2x^2-1 = 0 \Rightarrow x = 0{,}707;$

$\kappa''(0{,}707) > 0 \Rightarrow\ 0{,}707$ ist Minimumstelle; die *negative* Krümmung κ hat an der Stelle $x = 0{,}707$ ein Minimum, der Betrag von κ besitzt dort ein Maximum.
Scheitel $S(0{,}707/-0{,}347)$; $\kappa = -0{,}385$; $r = 2{,}60$ ... siehe a)

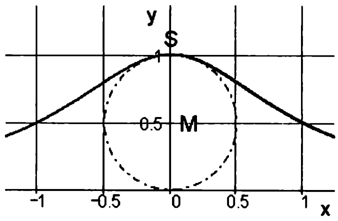
c) $y' = \dfrac{1}{\tan x};\ y'' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$



$\kappa(x) = \dfrac{-1/\sin^2 x}{\left(1+1/\tan^2 x\right)^{3/2}} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\cos^3 x = -\sin x;$

$\kappa' = -\cos x;\ \kappa'' = \sin x;\ \kappa' = 0 \Rightarrow x = \pi/2 = 1{,}571;$
$\kappa''(1{,}571) > 0 \Rightarrow 1{,}571$ ist Minimumstelle von κ; der Betrag von κ besitzt dort ein Maximum. Scheitel $S(1{,}571/0)$; $\kappa = -1$; $r = 1$

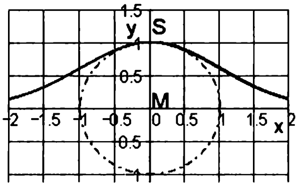
5.43 a) Scheitel nach Abbildung: S(0/1);



$y' = -\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2};\ y'' = \dfrac{2\cdot(3x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^3};\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$

$y''(0) = -2;\ \ \kappa(0) = \dfrac{-2}{(1+0)^{3/2}} = -2;\ r = 1;\ M(0/0{,}5)$

5.43 b) Scheitel nach Abbildung: S(0/1);
$y' = -x \cdot e^{-x^2/2}$; $y'' = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2}$; y(0) = 0; y'(0) = 0;
y''(0) = –1; κ(0) = –1/1 = –1; r = 1; M(0/0)

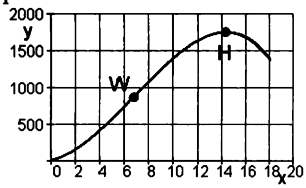


5.44 a) $y' = 3x^2 - 30x + 78$; $(y')' = 6x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5$; wegen $(y')'' = 6 > 0$ für alle x, besitzt die Ableitungsfunktion an der Stelle x = 5 ein Minimum: T(5/3); jeder Wert der Ableitung y' ist also ≥ 3 und damit stets positiv ⇒ y = f(x) streng monoton steigend; der kleinste Wert der Polynomfunktion ist mit f(0) = 10 positiv, daher ist die Funktion für x ≥ 0 positiv
b) $y' = 3x^2 - 24x + 60$ besitzt als tiefstgelegenen Punkt T(4/12); daher ist y = f(x) streng monoton steigend; der kleinste Wert ist mit f(0) = 50 positiv, daher ist die Funktion für x ≥ 0 positiv
c) $y' = 3x^2 - 30x + 72$ besitzt als tiefstgelegenen Punkt T(5/–3); y' ist daher auch negativ, y = f(x) daher auch streng monoton fallend und kann daher keine Kostenfunktion sein
d) $y' = 3x^2 - 36x + 135$ besitzt als tiefstgelegenen Punkt T(6/27), daher ist y = f(x) streng monoton steigend; der kleinste Wert ist mit f(0) = 100 positiv, daher ist die Funktion für x ≥ 0 positiv

5.45 a) € 23780; durchschnittliche Kosten K(1600)/1600 = € 14,86
b) $K' = 0{,}00003 \cdot x^2 - 0{,}046x + 24$; $(K')' = 0{,}0006 \cdot x - 0{,}046 = 0 \Rightarrow x = 766{,}67$; wegen $(K')'' = 0{,}0006 > 0$ für alle x, ist 766,67 Minimumstelle von K';
Minimalwert K'(766,67) = 6,37 > 0, daher ist K(x) überall streng monoton steigend
c) x = 200: K(201) – K(200) = 15,98; K'(200) = 16;
x = 800: K(801) – K(800) = 6,40; f'(800) = 6,4
x = 1500: K(1501) – K(1500) = 22,52; K'(1500) = 22,5

5.46 a) $K' = 0{,}3 \cdot x^2 - 5x + 25$; $(K')' = 0{,}6 \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow x = 8{,}33 > 0$, wegen $(K')'' = 0{,}6 > 0$ für alle x ist 8,33 Minimalstelle von K'; Minimalwert K'(8,33) = 4,17 > 0; daher ist K(x) überall streng monoton steigend; der kleinste Wert von K(x) für 0 ≤ x ≤ 20 ist 10, daher ist die Funktion wegen ihrer Monotonie dort auch positiv
b) K(8)/8 = 12,65 c) Exakt: K(11) – K(10) = 5,6; näherungsweise: K'(10) = 5

5.47 Bis zur Wendestelle steigende positive Grenzproduktivität, danach bis zur Hochpunktstelle sinkende positive Grenzproduktivität, danach negative Grenzproduktivität
a) $K' = -3x^2 + 40x + 40$; $K'' = -6x + 40$; $K''' = -6$;
$K' = 0 \Rightarrow x_1 = 14{,}3$; $x_2 = -0{,}93$ nicht sinnvoll hier;
$K''(14{,}3) < 0 \Rightarrow 14{,}3$ ist Hochpunktstelle;
$K'' = 0 \Rightarrow x_3 = 6{,}67$;
$K'''(6{,}7) = -6 \neq 0 \Rightarrow 6{,}7$ ist Wendestelle
b) Wendestelle: 66,7; Hochpunktstelle: 152,0;
c) Wendestelle: 46,7; Hochpunktstelle: 102,4



zu a)

5.48 a) $y(0) = \frac{F \cdot L^3}{3 E \cdot I} \approx 4$ mm; $y' = \frac{F L^3}{3 E \cdot I}\left(-\frac{3}{2 \cdot L} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{L^3}\right)$; $\tan\alpha = |y'(0)| = \frac{F \cdot L^2}{2 E I} = 0{,}00125 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}07°$;

$y'' = \frac{F}{E \cdot I} \cdot x$ $\kappa = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$; da y''(0) = 0, ist auch κ(0) = 0 b) $y = \frac{F}{6 E \cdot I} \cdot \left(3 L x^2 - x^3\right)$

5.49 $y(0) = \frac{q L^4}{8 E \cdot I} \approx 2{,}5$ mm; $y' = \frac{q \cdot L^4}{8 E \cdot I} \cdot \left(-\frac{4}{3L} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{L^4}\right)$; $y'' = \frac{q}{2 E \cdot I} \cdot x^2$

$\tan\alpha = |y'(0)| = \frac{q \cdot L^3}{6 E \cdot I} = 0{,}001125 \Rightarrow \alpha = 0{,}064°$; da y''(0) = 0, ist auch κ(0) = 0

5.50 $y' = \frac{q_0}{120\,E\cdot I\cdot L}\left(L^4 - 6L^2x^2 + 5x^4\right)$; $y'' = \frac{q_0}{120\,E\cdot I\cdot L}\left(-12L^2x + 20x^3\right)$; $y''' = \frac{q_0}{120\,E\cdot I\cdot L}\left(-12L^2 + 60x^2\right)$.

Größte Durchbiegung:

$y' = 0$; $L^4 - 6L^2x^2 + 5x^4 = 0$; Substitution $u = x^2$: $L^4 - 6L^2\cdot u + 5u^2 = 0 \Rightarrow u_1 = L^2/5$; $u_2 = L^2$;

$x^2 = L^2/5 \Rightarrow x_1 = L/\sqrt{5}$; $x^2 = L^2 \Rightarrow x_2 = L$.

$y''(L/\sqrt{5}) = -\frac{q_0\cdot L^2\cdot\sqrt{5}}{75\cdot E\cdot I} < 0 \Rightarrow x_1 = L/\sqrt{5}$ ist Maximumstelle; $y_{max} = \frac{2\sqrt{5}\cdot q_0 L^4}{1875\,E\cdot I}$;

x_2 ist die Einspannstelle, wo die Ableitung y' null sein muss.

Wendepunkt:

$y'' = 0$; $-12\cdot L^2x + 20x^3 = x\cdot(-12\cdot L^2 + 20\cdot x^2) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ (= Auflagestelle) sowie

$-12\cdot L^2 + 20x^2 \Rightarrow x_4 = \frac{\sqrt{15}}{5}L = 0{,}775\cdot L$ als Wendestelle (da dort $y''' = \frac{q_0}{E\cdot I\cdot L}\cdot x \neq 0$);

$y_W = \frac{\sqrt{15}\cdot q_0 L^4}{3750\,E\cdot I}$;

Anstieg der Wendetangente: $|k_W| = |y'(x_4)| = \frac{q_0\cdot L^3}{150\,E\cdot I}$

5.51 Siehe auch die Abbildungen unten, gezeichnet für $L = 3$ m, $E\cdot I = 2\cdot 10^6$ Nm², $F = 10000$N

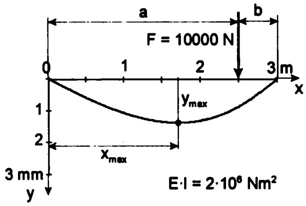
a) Einsetzen von $x = a$ in beide Terme ergibt die Gleichheit

b) Fall 1: $a > b$: Gesucht ist das Maximum von y, definiert für $a > b$: $y' = 0$;

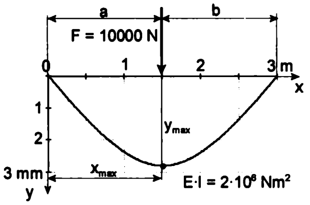
$\frac{x}{L}\cdot\left(1 + \frac{L}{b} - \frac{x^2}{a\cdot b}\right)' = 0 \Rightarrow x_{max} = a\cdot\sqrt{\frac{L+b}{3a}}$, $y_{max} = \frac{Fa^2b^2(L+b)}{9\cdot E\cdot I\cdot b\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{L+b}{3a}}$;

Fall 2: $a = b = L/2$: Kann als Sonderfall von $a > b$ gesehen werden, wenn hier auf $a = b$ erweitert wird: $x_{max} = \frac{L}{2}$, $y_{max} = \frac{F\,L^3}{48\cdot E\cdot I}$;

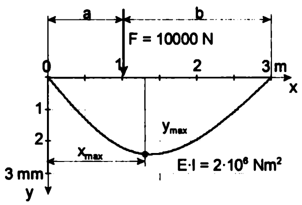
c) Fall $a < b$: Gesucht ist das Maximum von y, definiert für $a < b$. Man kann auch einfach a und b gegenüber Fall 1 vertauschen: $x_{max} = b\cdot\sqrt{\frac{L+a}{3b}}$, $y_{max} = \frac{Fa^2b^2(L+a)}{9\cdot E\cdot I\cdot a\cdot L}\cdot\sqrt{\frac{L+a}{3b}}$



Fall 1: a > b



Fall 2: a = b



Fall 3: a < b

5.52 $y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $y' = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$;

I: $a_4\cdot 0^4 + a_3\cdot 0^3 + a_2\,0^2 + a_1\cdot 0^1 + a_0 = 0$

II: $a_4\cdot 4^4 + a_3\cdot 4^3 + a_2\,4^2 + a_1\cdot 4^1 + a_0 = 0$

III: $4a_4\cdot 0^3 + 3a_3\cdot 0^2 + 2a_2\cdot 0 + a_1 = 0$

IV: $4a_4\cdot 4^3 + 3a_3\cdot 4^2 + 2a_2\cdot 4 + a_1 = 0$

$\underline{\text{V: } a_4\cdot 2^4 + a_3\cdot 2^3 + a_2\,2^2 + a_1\cdot 2^1 + a_0 = y_{max}}$

I und III $\Rightarrow a_0 = 0$, $a_1 = 0$; damit weiters

$256a + 64b + 16c = 0$

$256a + 48b + 8c = 0$

$\underline{16a + 8b + 4c = y_{max}}$

$a = \frac{y_{max}}{16}$; $b = -\frac{y_{max}}{2}$; $c = y_{max}$

$y = \frac{y_{max}}{16}\cdot\left(x^4 - 8x^3 + 16x^2\right)$

5.53 $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$

$y' = 2a\cdot x + b = 0 \Rightarrow$ Minimalstelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

I: $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 8$

II: $a\cdot 24^2 + b\cdot 24 + c = 12$

III: $\underline{a\cdot x_0^{\,2} + b\cdot x_0 + c = 7}$

I $\Rightarrow$ $c = 8$; Einsetzen für $x_0 \Rightarrow$

I*: $576a + 24b + 8 = 12$

$$\text{II*}: a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right) + 8 = 7$$

oder umgeformt:

I*: $576a + 24b = 4$

II*: $\underline{b^2 = 4a}$

Dies ist ein nicht lineares Gleichungssystem;

I* $\Rightarrow$ $a = b^2/4$; in II* eingesetzt:

$36b^2 + 6b = 1 \Rightarrow b_1 = -0{,}2697;\ b_2 = 0{,}1030;$

b_2 führt auf einen negativen Wert für x_0, was hier nicht sinnvoll ist.

$a = -(-0{,}2697)^2/4 = 0{,}01818.$

Damit lautet die gesuchte Parabel:

$y = 0{,}01818\cdot x^2 - 0{,}2697\cdot x + 8$

5.54 $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;\ y' = 2a\cdot x + b = 0;$

I: $a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c = 4$

II: $a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c = 4$

III: $\underline{2a\cdot 4 + b = 1}$ (Steigung in Q ist 1)

Daraus: $a = 1/8;\ b = 0;\ c = 2.$

Gesuchte Polynomfunktion (Parabel):

$$y = \frac{1}{8}\cdot x^2 + 2$$

5.55 $y = a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0;$

$y' = 5a_5\cdot x^4 + 4a_4\cdot x^3 + 3a_3\cdot x^2 + 2a_2\cdot x + a_1$

$y'' = 20a_5\cdot x^3 + 12a_4\cdot x^2 + 6a_3\cdot x + 2a_2;$

I: $a_5\cdot 0^5 + a_4\cdot 0^4 + a_3\cdot 0^3 + a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = 1$

II: $a_5\cdot 1^5 + a_4\cdot 1^4 + a_3\cdot 1^3 + a_2\cdot 1^2 + a_1\cdot 1 + a_0 = 0$

III: $5a_5\cdot 0^4 + 4a_4\cdot 0^3 + 3a_3\cdot 0^2 + 2a_2\cdot 0 + a_1 = 0$

IV: $5a_5\cdot 1^4 + 4a_4\cdot 1^3 + 3a_3\cdot 1^2 + 2a_2\cdot 1 + a_1 = 0$

V: $20a_5\cdot 0^3 + 12a_4\cdot 0^2 + 6a_3\cdot 0 + 2a_2 = 0$

VI: $\underline{20a_5\cdot 1^3 + 12a_4\cdot 1^2 + 6a_3\cdot 1 + 2a_2 = 0}$

I, III und V: $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0.$

Damit bleibt:

I*: $a_5 + a_4 + a_3 = -1$

II*: $5a_5 + 4a_4 + 3a_3 = 0$

III*: $\underline{20a_5 + 12a_4 + 6a_3 = 0}$

$\Rightarrow a_5 = -6;\ a_4 = 15;\ a_3 = -10.$

Gesuchte Polynomfunktion:

$y = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1$

5.56 $y = a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0;$

$y' = 3a_3\cdot x^2 + 2a_2\cdot x + a_1$

I: $a_3\cdot 0^3 + a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = 1$

II: $a_3\cdot 1^3 + a_2\cdot 1^2 + a_1\cdot 1 + a_0 = 0$

III: $3a_2\cdot 0^2 + 2a_1\cdot 0 + a_0 = 0$

IV: $\underline{3a_3\cdot 1^2 + 2a_2\cdot 1 + a_1 = 0}$

I und III: $a_0 = 1,\ a_1 = 0.$ Damit bleibt:

I*: $a_3 + a_2 = -1$

II*: $\underline{3a_3 + 2a_2 = 0}$

$\Rightarrow a_3 = 2;\ a_2 = -3.$

Gesuchte Polynomfunktion: $y = 2x^3 - 3x^2 + 1.$

$y' = 6x^2 - 6x;\ y'' = 12x - 6;$

$$\kappa(0) = \frac{y''(0)}{(1+y'(0))^{3/2}} = \frac{-6}{(1+0)^{3/2}} = -6;$$

$$\kappa(1) = \frac{y''(1)}{(1+y'(1))^{3/2}} = \frac{6}{(1+0)^{3/2}} = 6$$

Die Krümmung in einem Punkt einer Geraden ist 0, da $y'' = 0$ einer linearen Funktion.

Im Punkt P springt somit die Krümmung κ von 0 auf -6, in Q von 6 auf 0.

5.57 Alle Zeitwerte in Sekunden, alle Längen in cm.

a) $y = 20\cdot t\cdot e^{-2t}$; $D = [0; \infty[$; stetige Funktion.

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \text{"}0\cdot\infty\text{"} = \lim_{t\to\infty}\frac{20\cdot t}{e^{2t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{20}{2\cdot e^{2t}} = 0\,.$$

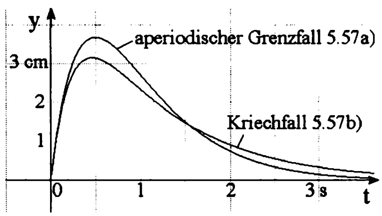
Extrema/Wendepunkte: $y' = 20\cdot e^{-2t}\cdot(1-2t);$

$y'' = 80\cdot e^{-2t}\cdot(t-1);\ y''' = 80\cdot(3-2t)\cdot e^{-2t};$

$y' = 0,\ 1-2t = 0 \Rightarrow t_2 = 0{,}5;$

$y''(0{,}5) < 0 \Rightarrow H(0{,}5/3{,}68);$

$y'' = 0;\ t - 1\ 0 \Rightarrow t_3 = 1;\ y'''(1) \neq 0 \Rightarrow W(1/2{,}71)$



5.57 b) $y(t) = \frac{40}{3} \cdot e^{-2,5t} \cdot \sinh(1,5t) = \frac{20}{3} \cdot (e^{-t} - e^{-4t})$; D = [0; ∞[; stetige Funktion.

Nullstellen: $y = 0$; $e^{-t} - e^{-4t} = 0 \,|\cdot e^{4t}$, $e^{3t} = 1 \Rightarrow t_1 = 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Extrema/Wendepunkte:

$y'(t) = -\frac{20}{3} \cdot (e^{-t} - 4 \cdot e^{-4t})$; $y''(t) = \frac{20}{3} \cdot (e^{-t} - 16 \cdot e^{-4t})$; $y'''(t) = -\frac{20}{3} \cdot (e^{-t} - 64 \cdot e^{-4t})$;

$y' = 0$; $e^{-t} - 4 \cdot e^{-4t} = 0 \Rightarrow t_2 = 0,46$; $y''(0,64) < 0 \Rightarrow H(0,46/3,15)$

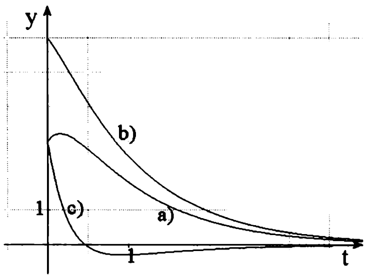
$y'' = 0$; $e^{-t} - 16 \cdot e^{-4t} = 0 \Rightarrow t_3 = 0,92$; $y'''(0,92) \neq 0 \Rightarrow W(0,92/2,48)$

5.58 a) D = [0; ∞[; stetige Funktion.

Nullstellen: $y = 0$; $5 \cdot e^{-t} = 2 \cdot e^{-4t}$; $5 \cdot e^{3t} = 2$; $e^{3t} = 0,4$;
$\ln e^{3t} = \ln 0,4$; $3t \cdot \ln e = -0,926 \Rightarrow t_1 = -0,305$ ist nicht in D; in D keine Nullstelle.
$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Extrema/Wendepunkte:

$y' = -5 \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-4t}$; $y'' = 5 \cdot e^{-t} - 32 \cdot e^{-4t}$;
$y''' = -5 \cdot e^{-t} + 128 \cdot e^{-4t}$;
$y' = 0 \Rightarrow t_2 = 0,16$; $y''(0,16) < 0 \Rightarrow H(0,16/3,21)$
$y'' = 0 \Rightarrow t_3 = 0,62$; $y'''(0,62) \neq 0 \Rightarrow W(0,62/2,52)$



b) D = [0; ∞[; stetige Funktion.

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow t_1 = -0,649$ ist nicht in D; in D keine Nullstelle. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Extrema/Wendepunkte: $y' = -7 \cdot e^{-t} + 4 \cdot e^{-4t}$; $y'' = 7 \cdot e^{-t} - 16 \cdot e^{-4t}$; $y''' = -7 \cdot e^{-t} + 64 \cdot e^{-4t}$;

$y' = 0 \Rightarrow t_2 = -0,17$ ist nicht in D, daher in D kein lokales Extremum;

$y'' = 0 \Rightarrow t_3 = 0,28$; $y'''(0,28) \neq 0 \Rightarrow W(0,28/4,98)$. Siehe Abbildung!

c) D = [0; ∞[; stetige Funktion.

Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow t_1 = 0,462$; $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Extrema/Wendepunkte: $y' = e^{-t} - 16 \cdot e^{-4t}$; $y'' = -e^{-t} + 64 \cdot e^{-4t}$; $y''' = e^{-t} - 256 \cdot e^{-4t}$;

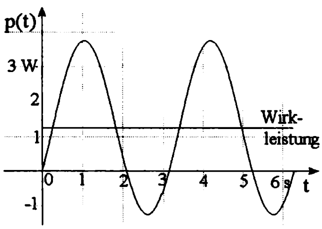
$y' = 0 \Rightarrow t_2 = 0,92$; $y''(0,92) > 0 \Rightarrow T(0,92/-0,30)$;

$y'' = 0 \Rightarrow t_3 = 1,39$; $y'''(1,39) \neq 0 \Rightarrow W(1,39/-0,23)$. Siehe Abbildung!

5.59 a) D = [0,2π]; unter Weglassung der Einheiten gilt:

$p(t) = 5 \cdot \sin t \cdot \sin(t+60°) =$
$= 5 \cdot \sin t \cdot [\sin t \cdot \cos 60° + \sin 60° \cdot \cos t] =$
$= 5 \cdot [\sin^2 t \cdot \cos 60° + \sin t \cdot \cos t \cdot \cos 60°] =$
$= 5 \cdot [½ \cdot (1 - \cos 2t) \cdot \cos 60° + ½ \sin 2t \cdot \sin 60°] =$
$= 2,5 \cdot \cos 60° - 2,5 \cdot \cos(2t + 60°) = 1,25 - 2,5 \cdot \cos(2t+60°)$.

Die Momentanleistung p(t) schwingt sinusförmig mit der doppelten Frequenz der Wechselspannung um den Durchschnittswert $\frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \cos 60° = 1,25$, die so genannte „Wirkleistung“.



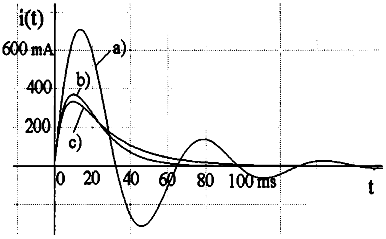
Nullstellen: $p(t) = 5 \cdot \sin t \cdot \sin(t+60°)$; Produkt–Null–Satz $\sin t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ s, $t_2 = 3,14$ s

$\sin(t + 60°) = \sin(t + \pi/3) = 0 \Rightarrow t_3 + \pi/3 = \pi$ oder $t_3 = 2,09$ s, $t_4 = 5,24$ s

Extrema liegen in der Mitte zwischen den Nullstellen.

5.60 Alle Zeitwerte in Sekunden, alle Stromstärkewerte i in A (wenn nicht anders angegeben). Für alle Funktionen gilt: $D = [0; \infty[$; stetig in D. $\omega_0 = 100\ s^{-1}$.

a) $\delta = 25\ s^{-1}$, $\delta < \omega_0$, $\omega = 96{,}8\ s^{-1}$; $\hat{i} = 1{,}03$:
$i(t) = \hat{i} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t) = 1{,}03 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(96{,}8t)$;
es liegt also eine Sinusschwingung vor, deren Amplitude exponentiell abklingt, so genannter *Schwingfall.*
Nullstellen: $i(t) = 0$; $\sin(96{,}8t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$;
$t_2 = \pi/96{,}8 = 0{,}032$; $t_3 = 2\pi/96{,}8 = 0{,}065$;
$t_4 = 3\pi/96{,}8 = 0{,}097$ usw. $\lim\limits_{t \to \infty} i(t) = 0$;

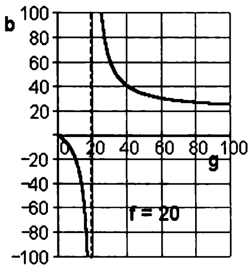


Extrema: $i'(t) = \hat{i} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (\omega \cdot \cos(\omega t) - \delta \cdot \sin(\omega t))$;
$i' = 0$; $\cdot\omega \cdot \cos(\omega t) - \delta \cdot \sin(\omega t) = 0$ oder $\tan(\omega t) = \omega/\delta$; $\tan(96{,}8t) = 3{,}87 \Rightarrow$
$96{,}8t = 1{,}32$; $96{,}8t = 1{,}32 + \pi$, $96{,}8t = 1{,}32 + 2\pi$ usw. oder $t = 0{,}014$; $0{,}047$; $0{,}079$ usw.;
hier befinden sich auf Grund der Eigenschaften einer (gedämpften) Sinusschwingung abwechselnd Hoch– und Tiefpunktstellen.

b) $\delta = 100\ s^{-1}$, $\delta = \omega_0$, so genannter *aperiodischer Grenzfall*: $i(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-100t}$.
Nullstellen: $i(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; Regel von de l'Hospital: $\lim\limits_{t \to \infty} i(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{100 \cdot t}{e^{100t}} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{100}{100 \cdot e^{100t}} = 0$.
Extrema/Wendepunkte: $i'(t) = (100 - 10\,000 \cdot t) \cdot e^{-100 \cdot t}$; $i''(t) = (1000\,000 \cdot t - 20\,000) \cdot e^{-100 \cdot t}$;
$i'''(t) = (3\,000\,000 - 100\,000\,000 \cdot t) \cdot e^{-100 \cdot t}$;
$i'(t) = 0$; $100 - 10\,000 \cdot t = 0 \Rightarrow t_2 = 0{,}01\ s = 10\ ms$; $i''(0{,}01) < 0 \Rightarrow H(10\ ms / 368\ mA)$;
$i''(t) = 0$; $1000\,000 \cdot t - 20\,000 = 0 \Rightarrow t_3 = 0{,}02\ s = 20\ ms$; $i'''(0{,}02) \neq 0 \Rightarrow W(20\ ms/271\ mA)$.
Siehe Abbildung oben.

c) $\delta = 125\ s^{-1}$, $\delta > \omega_0$, so genannter *Kriechfall*: $i(t) = \frac{4}{3} \cdot e^{-125 \cdot t} \cdot \sinh(75t) = \frac{2}{3} \cdot \left(e^{-50 \cdot t} - e^{-200 \cdot t}\right)$.
Nullstellen: $i(t) = 0$; $e^{-50 \cdot t} - e^{-200 \cdot t} = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; $\lim\limits_{t \to \infty} i(t) = 0$.
Extrema/Wendepunkte: $i'(t) = \frac{100}{3} \cdot \left(-e^{-50 \cdot t} + 4 \cdot e^{-200 \cdot t}\right)$; $i''(t) = \frac{5000}{3} \cdot \left(e^{-50 \cdot t} - 16 \cdot e^{-200 \cdot t}\right)$;
$i'''(t) = \frac{250000}{3} \cdot \left(-e^{-50 \cdot t} + 64 \cdot e^{-200 \cdot t}\right)$;
$i'(t) = 0, -e^{-50 \cdot t} + 4 \cdot e^{-200 \cdot t} = 0 \Rightarrow t_2 = 0{,}0092\ s = 9{,}2\ ms$; $i''(0{,}0092) < 0 \Rightarrow H(9{,}2\ ms/315\ mA)$;
$i''(t) = 0$, $e^{-50 \cdot t} - 16 \cdot e^{-200 \cdot t} = 0 \Rightarrow t_3 = 0{,}018\ s = 18\ ms$; $i'''(0{,}018) \neq 0 \Rightarrow W(18\ ms/248\ mA)$.
Siehe Abbildung oben.

5.61 a) $b(g) = \frac{g \cdot f}{g - f}$, $g \neq f$, $D = [0; \infty[$; rationale Funktion in g;



b) Polstelle: g = f; keine Nullstelle (für g > 0);
$\lim\limits_{g \to f-} b(g) = -\infty$; $\lim\limits_{g \to f+} b(g) = \infty$; $\lim\limits_{g \to \infty} b(g) = f$.
Asymptote g = f (da f Polstelle ist).
Extrema/Wendepunkte:
$b'(g) = -\frac{f^2}{(g-f)^2} \neq 0$ für alle g $\Rightarrow$ kein lokales Extremum;
$b''(g) = \frac{2f^2}{(g-f)^3} \neq 0$ für alle g $\Rightarrow$ kein Wendepunkt für f > 0

5.62 Summanden: x, $10 - x$

a) Zielfunktion: $f(x) = x \cdot (10 - x) = 10 \cdot x - x^2$, Maximumaufgabe; $f'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$;
$f''(x) = -2$; $f''(5) = -2 < 0 \Rightarrow x_{max} = 5$; zweiter Summand: $10 - 5 = 5$.
Die beiden Summanden sind daher gleich, nämlich 5.

b) Zielfunktion: $f(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$; Minimumaufgabe;
$f'(x) = 4x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$; $f''(x) = 4$; $f''(5) = -2 < 0 \Rightarrow x_{min} = 5$;
zweiter Summand: $10 - 5 = 5$. Die beiden Summanden sind auch hier gleich 5.

5.63 Rechteckseiten: x, y

a) Zielfunktion $u = 2x + 2y$, Minimumaufgabe; Nebenbedingung: $x \cdot y = A \Rightarrow y = \frac{A}{x}$;

$$u(x) = 2x + 2 \cdot \frac{A}{x};\ u' = 2 - 2 \cdot \frac{A}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{A};\ u'' = \frac{4A}{x^3};$$

$$u''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{\left(\sqrt{A}\right)^3} > 0 \Rightarrow x_{min} = \sqrt{A};\ y_{min} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A} = x_{min}.$$

Das Rechteck mit dem kleinsten Umfang ist daher ein Quadrat mit der Seite $\sqrt{A}$.

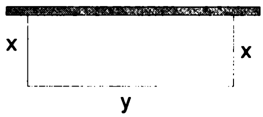
b) Zielfunktion: $A = x \cdot y$; Maximumaufgabe; Nebenbedingung: $2x + 2y = u \Rightarrow y = \frac{u}{2} - x$;

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{u}{2} - x\right);\ A'(x) = \frac{u}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{u}{4};\ A''(x) = -2;$$

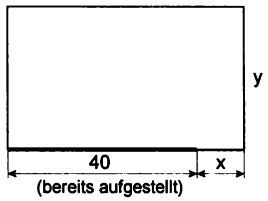
$$A''(u/4) = -2 < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{u}{4};\ y_{max} = \frac{u}{2} - x_{max} = \frac{u}{4} = x_{max}.$$

Das Rechteck mit dem größten Umfang ist daher ein Quadrat mit der Seite $\frac{u}{4}$.

5.64 Zielfunktion: $A = x \cdot y$, Maximumaufgabe;
Nebenbedinung: $2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$;
$A(x) = x \cdot (100 - 2x)$; $A'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$;
$A''(x) = -4$; $A''(25) = -4 < 0 \Rightarrow x_{max} = 25$; $y_{max} = 100 - 2 \cdot 25 = 50$.
Die Länge y ist doppelt so groß wie die Breite x: 50 m bzw. 25 m



5.65 a) Zielfunktion: $A = (40 + x) \cdot y$, Maximumaufgabe
Nebenbedingung: $x + y + 40 + x + y = 160 \Rightarrow y = 60 - x$.
$A(x) = (40 + x) \cdot (60 - x)$; $A'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$;
$A''(x) = -2$; $A''(10) = -2 < 0 \Rightarrow x_{max} = 10$; $y_{max} = 60 - 10 = 50$.
Die beiden Rechteckseiten sind daher 50 m lang, das Grundstück ist quadratisch einzuzäunen.

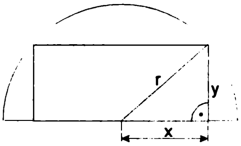


b) Zielfunktion: $A = (40 + x) \cdot y$, Maximumaufgabe;
Nebenbedingung: $x + y + 40 + x + y = 100 \Rightarrow y = 30 - x$.
$A(x) = (40 + x) \cdot (30 - x)$; $A' = -10 - 2x = 0 \Rightarrow x = -5$; sachlich nicht möglich (man müsste 5 m des Zaunes wieder abreissen), es gibt daher kein lokales Maximum für $x \geq 0$.
Randwerte: $0 \leq x \leq 30$; $A(0) = 40 \cdot 30 = 1200$; $A(30) = 0$. Es liegt daher ein Randextremum bei $x = 0$ vor.
Daher lauten die Seiten des flächengrößten Rechtecks: 40 m und $y = 30 - 0 = 30$ m.

5.66 a) Zielfunktion: $A = 2x \cdot y$, Maximumaufgabe

Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$A(x) = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$;



Vereinfachung der Zielfunktion:

Quadrieren, Faktor 4 weglassen $\Rightarrow f(x) = x^2 \cdot r^2 - x^4$;

$f'(x) = 2x \cdot r^2 - 4x^3 = 2x \cdot (r^2 - 2x^2) = 0$, Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$

(1) $2x = 0$ oder $x_1 = 0$ sowie (2) $r^2 - 2x^2 = 0$ oder $x_2 = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$

$f''(x) = 2r^2 - 12x^2$; $f''(x_1) = 2r^2 > 0 \Rightarrow$ bei x_1 besitzt $f(x)$ ein Minimum;

$f''(x_2) = 2r^2 - 6r^2 = -4r^2 < 0 \Rightarrow$ bei x_2 besitzt $f(x)$ ein Maximum: $x_{max} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$

$$y_{max} = \sqrt{r^2 - x_2^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Die Seiten des gesuchten flächengrößten Rechtecks sind daher $r \cdot \sqrt{2}$ und $\frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$.

b) Zielfunktion: $u = 4x + 2y$, Maximumaufgabe. Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$;

$u(x) = 4x + 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$; $u' = 4 - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \approx 0{,}894 \cdot r$;

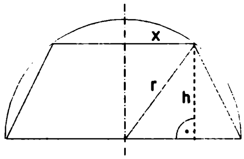
$u'' = -\frac{2r^2}{\left(r^2 - x^2\right)^{3/2}}$; $u''(0{,}894 \cdot r) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{2r}{\sqrt{5}}$; $y_{max} = \sqrt{r^2 - x_{max}^2} = \frac{r}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447 \cdot r$.

Die Seiten des gesuchten umfangsgrößten Rechtecks sind daher $\frac{4r}{\sqrt{5}}$ und $\frac{r}{\sqrt{5}}$.

5.67 a) Zielfunktion: $A = \frac{2x+2r}{2} \cdot h = (x + r) \cdot h$, Maximumaufgabe

Nebenbedingung: $r^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$A(x) = (x + r) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$;



$A' = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x \cdot (x+r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - 2x^2 - r \cdot x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$; $r^2 - 2x^2 - r \cdot x = 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{r}{2}$ ($x_2 = -r$ ist nicht mehr zulässig). $A'' = \frac{2x^2 - 2r \cdot x - r^2}{(r-x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}$; $A''(r/2) = -2 \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$

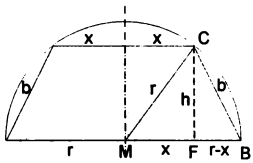
$x_{max} = \frac{r}{2}$. Die obere Seite des flächengrößten gleichschenkligen Trapezes hat die Länge r.

b) Zielfunktion: $u = 2r + 2b + 2x$, Maximumaufgabe.

Nebenbedingung: Dreieck MFC: $h^2 = r^2 - x^2$

Dreieck FBC: $b^2 = h^2 + (r - x)^2 = r^2 - x^2 + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx$

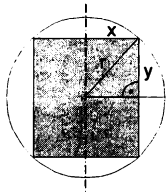
$\Rightarrow b = \sqrt{2r^2 - 2rx}$



$u(x) = 2r + 2\sqrt{2r^2 - 2rx} + 2x$; $u' = 2 - \frac{r \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 - r \cdot x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$;

$u'' = -\frac{r \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (r-x) \cdot \sqrt{r^2 - r \cdot x}}$; $u''(r/2) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{r}{2}$. Die obere Seite des umfangsgrößten gleichschenkligen Trapezes hat wie in a) die Länge r.

5.68 a) Zielfunktion: $A = 4x \cdot y$, Maximumaufgabe.



Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$. $A(x) = 4x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$;

Vereinfachung der Zielfunktion zu $f(x) = x^2 \cdot (r^2 - x^2)$;

$f'(x) = 2r^2 \cdot x - 4x^3 = 2x \cdot (r^2 - 2x^2) = 0$; Produkt–Null–Satz: $\Rightarrow$

(1) $x_1 = 0$ sowie (2) $x_2 = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$; $f''(x) = 2r^2 - 12x^2$;

$f''(0) > 0 \Rightarrow x_{min} = 0$, nicht gefragt;

$f''(r \cdot \sqrt{2}/2) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$; $y_{max} = \sqrt{r^2 - x_{max}^2} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2} = x_{max}$.

Das flächengrößte eingeschriebene Rechteck ist ein Quadrat mit der Seite $r \cdot \sqrt{2}$.

b) Zielfunktion: $u = 4x + 4y$, Maximumaufgabe.

Nebenbedingung: wie oben; $u(x) = 4x + 4 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$; $u'(x) = 4 - \frac{4}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$;

$u''(x) = -\frac{4r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}$; $u''\left(\frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = -\frac{8 \cdot \sqrt{2}}{r} < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$; $y_{max} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2} = x_{max}$.

Das umfangsgrößte eingeschriebene Rechteck ist wie in a) ein Quadrat mit der Seite $r \cdot \sqrt{2}$

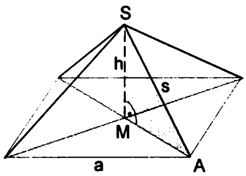
5.69 Zielfunktion: $A = x \cdot y$, Maximumaufgabe; Nebenbedingung: $\frac{h - y}{h} = \frac{x}{c} \Rightarrow y = h - \frac{h}{c} \cdot x$;

$A(x) = x \cdot \left(h - \frac{h}{c} \cdot x\right)$; $A'(x) = h - \frac{2h}{c} \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2}$; $A''(x) = -\frac{2h}{c}$; $A''(c/2) < 0$

$\Rightarrow x_{max} = \frac{c}{2} = 5{,}0$ cm. $y_{max} = h - \frac{h}{c} \cdot x_{max} = \frac{h}{2} = 3{,}0$ cm. $A_{max} = x_{max} \cdot y_{max} = \frac{c \cdot h}{4} = 15{,}0\ \text{cm}^2$.

Das flächengrößte Rechteck besitzt die Länge 5 cm und die Breite 3 cm. Flächeninhalt: 15 cm².

5.70 Zielfunktion: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$, Maximumaufgabe. $\overline{MA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$;



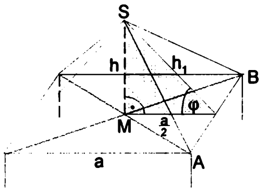
Nebenbedingung aus Dreieck SMA:

$\overline{MA}^2 + h^2 = s^2$ oder $\frac{a^2}{2} + h^2 = s^2 \Rightarrow a^2 = 2s^2 - 2h^2$.

$V(h) = V = \frac{2}{3} \cdot (s^2 - h^2) \cdot h$. Vereinfachung der Zielfunktion zu

$f(h) = s^2 \cdot h - h^3$; $f'(h) = s^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{s}{\sqrt{3}}$; $f''(h) = -6h$; $f''(s/\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow h_{max} = \frac{s}{\sqrt{3}} \approx 1{,}7$ m.

5.71 Zielfunktion: $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = 2 \cdot a \cdot h_1$, Minimumaufgabe.



Nebenbedingung: $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = V \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V}{a^2}$; $h_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Damit: $A(a) = 2a \cdot \sqrt{\frac{9V^2}{a^4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; Vereinfachung durch Quadrieren

zu $f(a) = 4a^2 \cdot \left(\frac{9V^2}{a^4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{36V^2}{a^2} + a^4$; $f'(a) = -\frac{72V^2}{a^3} + 4a^3 = 0 \Rightarrow a = \sqrt[6]{18 \cdot V^2}$;

$f''(a) = \frac{216V^2}{a^4} + 12a^2$; $f''(\sqrt[6]{18 \cdot V^2}) > 0 \Rightarrow a_{min} = \sqrt[6]{18 \cdot V^2} \approx 8{,}0$ m; $h_{min} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot V} = 5{,}6$ m;

$\tan\varphi = \frac{h_{min}}{a_{min}/2} \Rightarrow \varphi = 54{,}7°$

5.72 Zielfunktion: $V = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y$; Maximumaufgabe. Nebenbedingung: $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{c} \Rightarrow y = h - \frac{h}{c} \cdot x$;

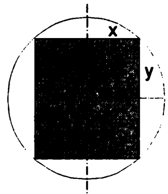
$V(x) = \frac{\pi \cdot h}{4 \cdot c} \cdot x^2 \cdot (c - x)$; Vereinfachung zu $f(x) = x^2 \cdot (c - x)$; $f'(x) = 2c \cdot x - 3x^2 = x \cdot (2c - 3x) = 0$:

Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$ (1) $x = 0$, hier nicht von Interesse; (2) $x = \frac{2c}{3}$; $f''(x) = 2c - 6x$;

$f''(2c/3) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{2c}{3}$; $y_{max} = \frac{h}{3}$; $V_{max} = \frac{\pi}{27} \cdot c^2 \cdot h$; $V_{Kegel} = \frac{\pi}{12} \cdot c^2 \cdot h$;

$V_{max}/V_{Kegel} = 4/9 = 44{,}4\%$

5.73 a) Zielfunktion: $V = \pi \cdot x^2 \cdot 2y$, Maximumaufgabe.



Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$V(x) = 2\pi \cdot x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$; Vereinfachung der Zielfunktion zu $f(x) = x^4 \cdot (R^2 - x^2)$; $f'(x) = 4R^2 \cdot x^3 - 6x^5 = 2x^3 \cdot (2R^2 - 3x^2) = 0$;

Produkt–Null–Satz: $\Rightarrow$ (1) $x_1 = 0$, hier nicht von Interesse, sowie

(2) $x_2 = \frac{R}{3} \cdot \sqrt{6}$; $f''(x) = 12R^2 \cdot x^2 - 30x^4$;

$f''(R\sqrt{6}/3) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{R}{3} \cdot \sqrt{6}$; $y_{max} = \sqrt{R^2 - x_{max}^2} = \frac{R}{3} \cdot \sqrt{3}$. Zylinderradius: $\frac{R}{3} \cdot \sqrt{6}$;

Zylinderhöhe: $\frac{2R}{3} \cdot \sqrt{3}$.

b) Zielfunktion: $O = 2\pi \cdot x^2 + 4\pi \cdot x \cdot y$, Maximumaufgabe. Nebenbedingung wie oben.

$O(x) = 2\pi \cdot x^2 + 4\pi \cdot x\sqrt{R^2 - x^2}$; $O'(x) = 4\pi \cdot x + \frac{4\pi \cdot (R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$; $x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = 2x^2 - R^2$;

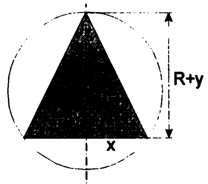
Quadrieren und $u = x^2 \Rightarrow 5u^2 - 5r^2u + r^4 = 0$; $u_1 = 0{,}7236 \cdot r^2$; $u_2 = 0{,}2764 \cdot r^2$; daraus:

$x_1 = 0{,}851 \cdot R$; $x_2 = 0{,}526 \cdot R$; $x_3 = -x_1$, $x_4 = -x_2$; eine negative Lösung ist sachlich nicht sinnvoll; x_2 erfüllt nicht die Probe der Wurzelgleichung!

$O''(x) = 4\pi + \frac{4\pi \cdot (2x^3 - 3R^2x)}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$; $O''(0{,}851 \cdot R) < 0 \Rightarrow x_{max} = 0{,}851 \cdot R$; $y_{max} = 0{,}526 \cdot R$.

Zylinderradius: $0{,}851 \cdot R$; Zylinderhöhe: $2 \cdot y_{max} = 1{,}051 \cdot R$.

c) Zielfunktion $V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot (R + y)$, Maximumaufgabe.



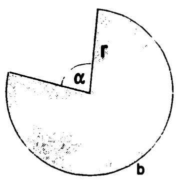
Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2$.

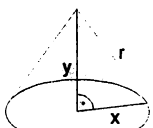
$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 - y^2) \cdot (R + y)$; Vereinfachung zu $f(y) = (R^2 - y^2) \cdot (R + y)$;

$f'(y) = R^2 - 2R \cdot y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{R}{3}$; $y_2 = -R$ ist sachlich nicht sinnvoll; $f''(y) = -6y - 2R$; $f''(R/3) < 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{R}{3}$; $x_{max} = \frac{2R \cdot \sqrt{2}}{3}$; Kegelradius: $\frac{2R \cdot \sqrt{2}}{3}$;

Kegelhöhe: $R + y_{max} = \frac{4R}{3}$.

5.74 Umfang des Basiskreises des Kegels = Bogenlänge b;





$2\pi \cdot x = r \cdot \frac{\pi}{180} \cdot (360 - \alpha) \Rightarrow \alpha = 360 \cdot \left(1 - \frac{x}{r}\right)$.

Zielfunktion: $V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot y$, Maximumaufgabe;

Nebenbedingung: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$;

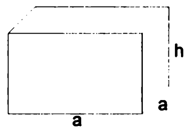
$V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$; Vereinfachung der Zielfunktion zu $f(x) = x^4 \cdot (r^2 - x^2)$;

$f'(x) = 2x^3 \cdot (2r^2 - 3x^2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0$ (nicht von Interesse), $x_2 = \frac{r}{3} \cdot \sqrt{6}$;

$x_3 = -x_2$ ist sachlich nicht möglich; $f''(x) = 12 \cdot r^2 \cdot x^2 - 30 \cdot x^4$; $f''(x_2) < 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{r}{3} \cdot \sqrt{6}$;

$\alpha_{max} = 360 \cdot \left(1 - \frac{x_{max}}{r}\right) = 66{,}1°$. Maximales Fassungsvermögen beim Mittenwinkel $\alpha = 66{,}1°$.

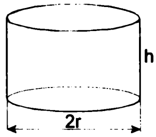
5.75 **a)** Zielfunktion: $O = 2a^2 + 4a \cdot h$, Minimumaufgabe



Nebenbedingung: $V = a^2 \cdot h = 1\ dm^3 \Rightarrow h = 1/a^2$;
$O(a) = 2a^2 + 4/a$; $O'(a) = 4a - 4/a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ dm; $O''(a) = 4 + 8/a^3$;
$O''(1) > 0 \Rightarrow$ Grundkante $a_{min} = 10$ cm; Höhe $h_{min} = a_{min}$; d.h. die Dose hat die Form eines Würfels

b) Zielfunktion: $A = a^2 + 4a \cdot h$, Minimumaufgabe; Nebenbedingung: $V = a^2 \cdot h = 1\ dm^3 \Rightarrow h = 1/a^2$;
$O(a) = a^2 + 4/a$; $O'(a) = 2a - 4/a^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$ dm; $O''(a) = 2 + 8/a^3$;
$O''(\sqrt[3]{2}) > 0 \Rightarrow$ Grundkante $a_{min} = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$ dm; Höhe $h_{min} = \sqrt[3]{1/4} = 0{,}63$ dm

c) Zielfunktion: $O = 2 \cdot \pi\, r^2 + 2 \cdot \pi\, r\, h$, Minimumaufgabe



Nebenbedingung: $V = \pi\, r^2\, h = 1\ dm^3 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi \cdot r^2}$;

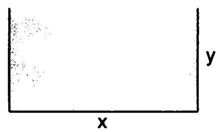
$O(r) = 2 \cdot \pi\, r^2 + 2/r^2$ usw., $r_{min} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0{,}54$ dm; $h_{min} = 2r_{min} = 1{,}08$ dm

d) Zielfunktion: $O = \pi\, r^2 + 2 \cdot \pi\, r\, h = \pi\, r \cdot (r+2h)$, Minimumaufgabe;

Nebenbedingung: $V = \pi\, r^2\, h = 1\ dm^3$ usw. $r_{min} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}68$ dm; $h_{min} = r_{min}$

5.76 Mit $t > 0$ ist auch t^2 minimal; $t^2 = \frac{2b}{g \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{4b}{g \cdot \sin 2\alpha}$ ist minimal, wenn $\sin 2\alpha$ maximal ist. Der Maximalwert eines Sinus ist 1; $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90°$; also $\alpha = 45°$.
Lösung über Ableitung: $f(\alpha) = \frac{1}{\sin 2\alpha}$; $f'(\alpha) = -\frac{2\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 0$, $\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 45°$ usw.

5.77 **a)** Zielfunktion: $U = x + 2y$, Minimumaufgabe

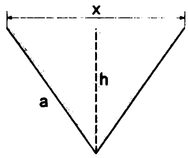


Nebenbedingung: $A = x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$; $u(x) = x + \frac{2}{x}$;

$u'(x) = 1 - 2/x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$; $u''(x) = 4/x^3$; $u''(\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$

$x_{min} = \sqrt{2}\ m \approx 1{,}41\ m$, $y_{min} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\ m \approx 0{,}71$ m

b) Zielfunktion: $u = 2a = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2}$, Minimumaufgabe



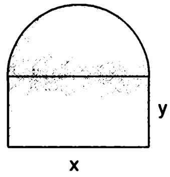
Nebenbedingung: $A = \frac{x \cdot h}{2} = 1 \cdot \Rightarrow h = \frac{2}{x}$.

$u(x) = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2}$; Vereinfachung der Zielfunktion zu

$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 4 \cdot x^{-2}$ usw., $x_{min} = 2$ m; $h_{min} = 1$ m.

Seite $a = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m

c) Zielfunktion: $u = x + 2y + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x$, Minimumaufgabe



Nebenbedingung: $A = x\cdot y + \frac{\pi}{8}\cdot x^2 = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} - \frac{\pi}{8}\cdot x$;

$u(x) = x + \frac{2}{x} - \frac{\pi}{4}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x = \frac{2}{\pi} + x\cdot\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ usw.

$x_{min} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{4+\pi}} \approx 1{,}06$ m; $y_{min} = \frac{1}{x} - \frac{\pi}{8}\cdot x \approx 0{,}53$ m

5.78 $x = v_0\cdot t\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha}$; Einsetzen: $y = x\cdot\tan\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cdot\cos^2\alpha} = x\cdot(\ldots) = 0$; $(\ldots) \Rightarrow$

$x = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\alpha$ = Wurfweite $w(\alpha)$ als Zielfunktion; Vereinfachung der Zielfunktion: $f(\alpha) = \sin 2\alpha$;
$f'(\alpha) = 2\cdot\cos 2\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 45°$ (weitere Lösungen nicht von Interesse); $f''(\alpha) = -4\cdot\sin 2\alpha$;
$f''(45°) < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_{max} = 45°$

5.79 Zielfunktion: $E = L\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}$, Maximumaufgabe. Die Zielfunktion kann als Funktion der Höhe h ausgedrückt werden. Nebenbedingungen geben den Zusammenhang von $\sin\varphi$ bzw. r mit h an:

$r^2 = h^2 + 50^2$ bzw. $\sin\varphi = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$. $E(h) = L\cdot\frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+50^2}}}{h^2+50^2} = L\cdot\frac{h}{\left(h^2+50^2\right)^{3/2}}$.

$E'(h) = L\cdot\frac{2\cdot(1250-h^2)}{(h^2+50^2)^{5/2}} = 0 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{1250} \approx 35$ cm. $E''(h) = L\cdot\frac{6h\cdot(h^2-3750)}{(h^2+50^2)^{7/2}}$;

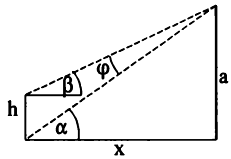
$E''(35) = -0{,}00000016 < 0 \;\Rightarrow\; h_{max} \approx 35$ cm.. Die Lampe sollte also in einer Höhe von etwa 35 cm aufgehängt werden. Führt man die Rechnung ohne festen Wert für a, so erhält man $h_{max} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

5.80 Zielfunktion: $E = \frac{1000}{x^2} + \frac{2000}{(20-x)^2}$; Minimumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion:

$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(20-x)^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{4}{(20-x)^3}$; $\frac{(20-x)^3}{x^3} = 2$; $\frac{20-x}{x} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \frac{20}{1+\sqrt[3]{2}} = 8{,}85$ m;

$f''(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{12}{(20-x)^4}$; $f''(8{,}85) > 0 \Rightarrow x_{min} = 8{,}85$ m

5.81 $\tan\alpha = \frac{a}{x}$, $\tan\beta = \frac{a-h}{x}$; $\tan\varphi = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{h\cdot x}{x^2+a\cdot(a-h)}$;



φ ist (für $0 < \varphi < \pi/2$) maximal, wenn $\tan\varphi$ maximal ist.

Vereinfachte Zielfunktion: $f(x) = \frac{x}{x^2+a\cdot(a-h)}$; $f'(x) = \frac{a\cdot(a-h)-x^2}{\left[x^2+a\cdot(a-h)\right]^2} = 0$

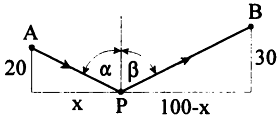
$\Rightarrow x = \sqrt{a\cdot(a-h)} \approx 149$ cm; $f''(x) = 2x\cdot\frac{x^2-3a\cdot(a-h)}{\left[x^2+a\cdot(a-h)\right]^3}$; $f''(149) < 0 \Rightarrow x_{max} \approx 149$ cm

5.82 $\tan\alpha = \frac{a+b}{x}$, $\tan\beta = \frac{b}{x}$; $\tan\varphi = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{a\cdot x}{x^2+b\cdot(a+b)}$; φ ist (für $0 < \varphi < \pi/2$) maximal, wenn $\tan\varphi$ maximal ist. Vereinfachte Zielfunktion: $f(x) = \frac{x}{x^2+b\cdot(a+b)}$;

$f'(x) = \frac{b\cdot(a+b)-x^2}{\left[x^2+b\cdot(a+b)\right]^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a\cdot(a+b)} \approx 1{,}9$ m; $f''(x) = 2x\cdot\frac{x^2-3b\cdot(a+b)}{\left[x^2+b\cdot(a+b)\right]^3}$;

$f''(1{,}9) < 0 \Rightarrow x_{max} \approx 1{,}9$ m

5.83 t ist die Zeit des Läufers von A nach B; Zielfunktion:



$t = \frac{1}{c}\cdot\left[\sqrt{20^2+x^2} + \sqrt{30^2+(100-x)^2}\right]$, Minimumaufgabe;

vereinfachte Zielfunktion: $f(x) = \sqrt{20^2+x^2} + \sqrt{30^2+(100-x)^2}$;

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+400}} - \frac{100-x}{\sqrt{x^2-200x+10900}} = 0$; $\frac{x^2}{x^2+400} = \frac{(100-x)^2}{x^2-200x+10900}$, $x^2 + 160x - 8000 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 40$; $x_2 = -200$ sachlich nicht möglich; $f''(x) = \frac{400}{\left(x^2+400\right)^{3/2}} - \frac{900}{\left(x^2-200x+10900\right)^{3/2}}$;

$f''(40) > 0 \Rightarrow x_{min} = 40$ m. $\tan(90°-\alpha) = 20/x_{max} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 63{,}5°$;
$\tan(90°-\beta) = 30/(100-x_{max}) = 0{,}5 \Rightarrow \beta = 63{,}5°$. $\alpha = \beta$ bedeutet das Reflexionsgesetz.

5.84 t ist die Zeit des Läufers von A nach B; Zielfunktion: $t = \frac{1}{c_1}\cdot\sqrt{40^2+x^2} + \frac{1}{c_2}\cdot\sqrt{30^2+(60-x)^2}$;

Minimumaufgabe; $t'(x) = \frac{x}{c_1\cdot\sqrt{40^2+x^2}} - \frac{60-x}{c_2\cdot\sqrt{30^2+(60-x)^2}} = 0$; da $\sin\alpha = x\big/\sqrt{40^2+x^2}$ und

$\sin\beta = (60-x)\big/\sqrt{30^2+(60-x)^2}$ folgt daraus das Brechungsgesetz $\sin\alpha/\sin\beta = c_1/c_2$.

5.85 Der Winkel α, für den $L = x + y = a/\cos\alpha + a/\sin\alpha$ *kürzestmöglich* ist, bestimmt die Länge jenes *längsten* Balkens, der gerade noch um die Ecke gebracht werden kann.

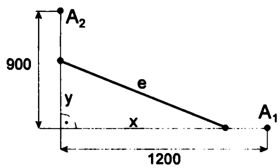
Zielfunktion: $L(\alpha) = a/\cos\alpha + a/\sin\alpha$; Minimumaufgabe. $L'(\alpha) = a\cdot\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow$

$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = 0$, $\tan^3\alpha = 1$, $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

Statt die zweite Ableitung zu bilden und damit $\alpha = 45°$ als Extremalstelle zu bestätigen, kann man auch mit dem Vorzeichenwechsel von $L'(\alpha)$ bei $\alpha = 45°$ argumentieren: Für $0 \le \alpha \le 90°$ ist $\sin\alpha < \cos\alpha$, wenn $\alpha < 45°$, und $\sin\alpha > \cos\alpha$, wenn $\alpha > 45°$. Daher ist um $\alpha = 45°$ der Zähler von $L'(\alpha)$ und wegen des Quadrates im Nenner auch $L'(\alpha)$ selbst für $\alpha < 45°$ negativ, für $\alpha > 45°$ positiv. $L(\alpha)$ fällt daher bis $\alpha = 45°$, danach steigt die Funktion. Dies bedeutet aber gerade ein lokales Minimum von $L(\alpha)$ an der Stelle $\alpha = 45°$.

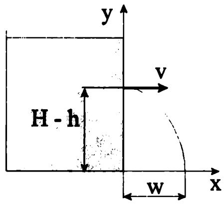
Somit: $\alpha_{min} = 45°$ und damit ist die maximale Balkenlänge $a/\cos 45° + a/\sin 45° = 2a\cdot\sqrt{2}$

5.86 Entfernung nach t Stunden: Zielfunktion $e = \sqrt{x^2+y^2}$ mit



$x = 1{,}2 - 60\cdot t$ und $y = 0{,}9 - 80\cdot t$, Mininumaufgabe.
Vereinfachte Zielfunktion $f(t) = e^2 = (1{,}2 - 60\cdot t)^2 + (0{,}9 - 80\cdot t)^2$;
$f'(t) = 20000\cdot t - 288 = 0 \Rightarrow t = 0{,}0144$ h ; $f''(t) = 20000$;
$f''(0{,}0144) > 0 \Rightarrow t_{min} = 0{,}0144$ h ≈ 52 s; $e_{min} = 420$ m

5.87 Zielfunktion $T(v) = 1 + \frac{v}{12} - \frac{v}{18} + \frac{5}{v} = 1 + \frac{v}{36} + \frac{5}{v}$, Minimumaufgabe; $T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{5}{v^2} = 0 \Rightarrow$
$v = 13{,}42$ m/s; $T''(v) = 10/v^3$; $T''(13{,}42) > 0 \Rightarrow v_{min} = 13{,}42$ m/s ≈ 48 km/h

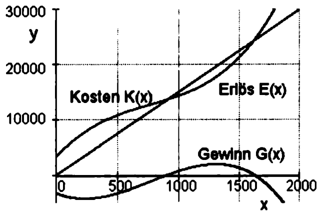


5.88 Waagrechter Wurf eines Flüssigkeitsteilchens, das zur Zeit t = 0 durch das Loch austritt: $x = v \cdot t$, $y = H - h - g \cdot t^2/2 = H - h - g \cdot x^2/(2v^2)$;
$y = 0 \Rightarrow$ Spritzweite $w = v \cdot \sqrt{2(H-h)/g}$ als Zielfunktion;
$w = \mu\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2(H-h)/g} = 2\mu\sqrt{(H-h) \cdot h}$;
Maximumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion: $f(h) = (H - h) \cdot h$.
$f'(h) = H - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow h = H/2$;
$f''(h) = -2$; $f''(h/2) < 0 \Rightarrow h_{max} = H/2$

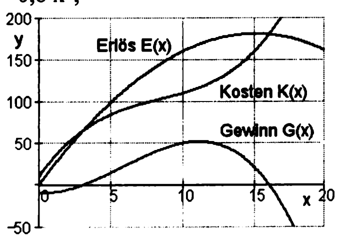
5.89 $\hat{y}$ ist maximal, wenn der Nenner minimal ist; vereinfachte Zielfunktion:
$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$, Minimumaufgabe; $f'(\omega) = 4\omega \cdot (2 \cdot \delta^2 - \omega_0^2 + \omega^2) = 0$;
Produkt–Null–Satz $\Rightarrow \omega = 0$ (nicht von Interesse) sowie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$;
$f''(\omega) = 12\omega^2 + 8 \cdot \delta^2 - 4 \cdot \omega_0^2$; $f''(\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}) = 8 \cdot (\omega_0^2 - 2\delta^2) > 0$ (aus sachlichen Gründen) $\Rightarrow$
$\omega_{min} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ macht den Nenner minimal und dadurch $\hat{y}$ maximal

5.90 Sind p die Grabungskosten je Meter längs der Straße, so betragen die Grabungskosten als Zielfunktion $K(x) = p \cdot x + 2p \cdot \sqrt{(2000-x)^2 + 500^2}$; vereinfachte Zielfunktion:
$f(x) = x + 2 \cdot \sqrt{(2000-x)^2 + 500^2}$, Minimumaufgabe; $K'(x) = 1 - \dfrac{2 \cdot (2000-x)}{\sqrt{x^2 - 4000x + 4250000}} = 0 \Rightarrow$
$x = 1711$; $K''(x) = \dfrac{500000}{(x^2 - 4000x + 4250000)^{3/2}}$; $K''(1711) = 0{,}0026 > 0 \Rightarrow x_{min} = 1711$ m

5.91 a) Zielfunktion: Grenzkosten $GK(x) = K'(x) = 0{,}00003x^2 - 0{,}046x + 24$, Minimumaufgabe;
$GK'(x) = K''(x) = 0{,}00006x - 0{,}046 = 0 \Rightarrow x = 766{,}7$;
$GK''(x) = 0{,}00006$; $GK(766{,}7) > 0 \Rightarrow x_{min} \approx 767$ Stück. Bei 767 Stück sind die Grenzkosten am geringsten.
b) $p = 15$; Erlös $E(x) = 15 \cdot x$;
Zielfunktion: Gewinn $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}00001\,x^3 + 0{,}023\,x^2 - 9x - 3300$, Max.aufgabe;
$G'(x) = -0{,}00003x^2 + 0{,}046x - 9 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = 230{,}2$ sowie $x_2 = 1303{,}1$;
$G''(x) = -0{,}00006x + 0{,}046$;
$G''(230{,}2) = 0{,}032 > 0 \Rightarrow x_{min} = 230{,}2$ (nicht von Interesse); $G''(1303{,}1) = -0{,}032 < 0 \Rightarrow$
$x_{max} = 1303{,}1$; $G(1303{,}1) = 1900$.
Bei ca. 1303 Stück ist der Gewinn mit 1900 € am größten.

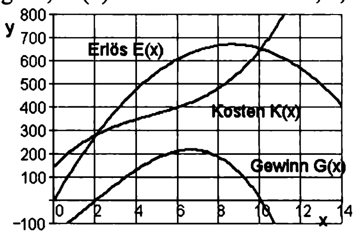


5.92 a) Zielfunktion Grenzkosten $GK(x) = K'(x) = 0{,}3x^2 - 5x + 25$; Minimumaufgabe;
$GK'(x) = 0{,}6x - 5 = 0 \Rightarrow x = 8{,}33$; $GK''(x) = 0{,}6$; $GK''(8{,}33) > 0 \Rightarrow x_{min} = 8{,}33$.
Bei ca. 8 Stück sind die Grenzkosten am geringsten.
b) $x = 30 - 1{,}25 \cdot p \Rightarrow p = 24 - 0{,}8 \cdot x$; Erlös $E(x) = p \cdot x = 24x - 0{,}8 \cdot x^2$;
Zielfunktion: Gewinn $G(x) = E(x) - K(x) =$
$= -0{,}1 \cdot x^3 + 1{,}7 \cdot x^2 - x - 10$, Maximumaufgabe;
$G'(x) = -0{,}3x^2 + 3{,}4 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = 0{,}3$ sowie $x_2 = 11{,}0$; $G''(x) = -0{,}6x + 3{,}4$;
$G''(0{,}3) > 0 \Rightarrow x_{min} = 0{,}3$ (nicht von Interesse);
$G''(11{,}0) < 0 \Rightarrow x_{max} = 11$; $G(11{,}0) = 51{,}6$.
Bei 11 Stück ist der Gewinn mit 51,6 Geldeinheiten oder 5160 € am größten.



5.93 a) Zielfunktion Grenzkosten $GK(x) = K'(x) = 3x^2 - 28x + 90$, Minimumaufgabe;
$GK'(x) = 6x - 28 = 0 \Rightarrow x = 4{,}7$; $GK''(x) = 6$; $GK''(4{,}7) = 6 > 0 \Rightarrow x_{min} = 4{,}7 \approx 5$.
Bei 5 Stück sind die Grenzkosten am geringsten

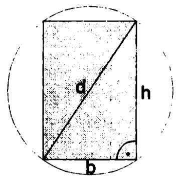
b) Zielfunktion Erlös $E(x) = p \cdot x = 155x - 9x^2$; Maximumaufgabe; $E'(x) = 155 - 18x \Rightarrow x = 8{,}6$;
$E''(x) = -18$; $E''(8{,}6) < 0 \Rightarrow x_{max} = 8{,}6 \approx 9$.
Bei 9 Stück ist der Erlös am größten.



Zielfunktion Gewinn
$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 5x^2 + 65x - 145$;
$G'(x) = -3x^2 + 10x + 65 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = 6{,}6$; $x_2 = -3{,}3$ sachlich nicht möglich;
$G''(x) = -6x + 10$; $G''(6{,}6) < 0 \Rightarrow x_{max} = 6{,}6 \approx 7$.
Bei 7 Stück ist der Gewinn am größten.

5.94 $p(x) = k \cdot x + d$; $10 = 4000 \cdot k + d$; $15 = 3000 \cdot k + d \Rightarrow k = -0{,}005$ und $d = 30$; $p(x) = 30 - 0{,}005 \cdot x$;
Zielfunktion Erlös $E(x) = p(x) \cdot x = 30x - 0{,}005x^2$; Maximumaufgabe;
$E'(x) = 30 - 0{,}01x = 0 \Rightarrow x = 3000$; $E''(x) = -0{,}01$; $E''(3000) = -0{,}01 < 0 \Rightarrow x_{max} = 3000$.
Bei 3000 Stück ist der Erlös am größten.

5.95 Zielfunktion: $W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2$, Maximumaufgabe. Nebenbedingung: $h^2 = d^2 - b^2$;



$W(b) = W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot (d^2 - b^2)$; vereinfachte Zielfunktion: $f(h) = b \cdot (d^2 - b^2)$;
$f'(b) = d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = d/\sqrt{3}$; $f''(b) = -6b$;
$f''(d/\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow b_{max} = d/\sqrt{3}$; $h_{max} = d \cdot \sqrt{2}/\sqrt{3}$; somit: $b_{max} : h_{max} = 1 : \sqrt{2}$

5.96 Zielfunktion $P = \rho \cdot A \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot w \cdot (w - u) \cdot u$, Maximumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion:
$f(u) = (w - u) \cdot u$; $f'(u) = w - 2u = 0 \Rightarrow u = w/2$; $f''(u) = -2$; $f''(w/2) = -2 < 0 \Rightarrow u_{max} = w/2$

5.97 a) Zielfunktion $M(x) = \frac{q}{2} \cdot (L - x) \cdot x$, Maximumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion: $f(x) = (L - x) \cdot x$;
$f'(x) = L - 2x \Rightarrow x = L/2$; $f''(x) = -2$; $f''(L/) = -2 < 0 \Rightarrow x_{max} = L/2$; $M_{max} = q \cdot L^2/8$

b) Zielfunktion $M(x) = \frac{q}{6} \cdot x \cdot \left(L - \frac{x^2}{L}\right)$, Maximumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion:
$f(x) = x \cdot (L - x^2/L)$; $f'(x) = L - 3x^2/L = 0 \Rightarrow x = L/\sqrt{3}$; $f''(x) = -6x/L$; $f''(L/\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$
$x_{max} = L/\sqrt{3} \approx 0{,}58 \cdot L$; $M_{Max} = \frac{q \cdot \sqrt{3}}{27} \cdot L^3$

5.98 Gewicht des Trägers: $F_G = 200 \cdot x$; $F \cdot x = (200 \cdot x) \cdot \frac{x}{2} + 0{,}5 \cdot 3000 \Rightarrow$
Zielfunktion $F = \frac{1}{x} \cdot \left(200x \cdot \frac{x}{2} + 0{,}5 \cdot 3000\right) = 100x + \frac{1500}{x}$, Minimumaufgabe;
$F'(x) = 100 - 1500/x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{15}$; $F''(x) = 30/x^3$; $F''(\sqrt{15}) > 0 \Rightarrow x_{min} = \sqrt{15} \approx 3{,}9$ m

5.99 $F_x = F \cdot \cos\alpha$; $F_y = F \cdot \sin\alpha$; $F_G = m \cdot g$; $F_x = -F_R = -\mu \cdot (F_y - F_G)$; $F \cdot \cos\alpha = -\mu \cdot (F \cdot \sin\alpha - m \cdot g) \Rightarrow$
Zielfunktion $F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$; Minimumaufgabe; vereinfachte Zielfunktion: $f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$;
$f'(\alpha) = \frac{-(-\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha)^2} = 0$, $-\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = \mu \cdot \cos\alpha$, $\tan\alpha = \mu = 0{,}3 \Rightarrow \alpha = 16{,}7°$.
Um sich die Ermittlung von $f''(\alpha)$ zu ersparen, kann man wie folgt argumentieren: Der Zähler von $f'(\alpha)$ ändert sein Vorzeichen für $\alpha = 16{,}7°$ von − auf + und dies macht wegen des Quadrates (positiv!) im Nenner auch $f'(\alpha)$. Daher fällt die Funktion $f(\alpha)$ bis $\alpha = 16{,}7°$ und steigt danach. Daher befindet sich bei $\alpha = 16{,}7°$ein lokales Minimum der Zielfunktion: $\alpha_{min} = 16{,}7°$.

5.100 a) Zielfunktion: $I(\omega) = U/[R^2 + (\omega L\text{-}1/(\omega C))^2]$, Maximumaufgabe;
Vereinfachung der Zielfunktion durch Verwenden ihres Kehrwertes: I ist am größten, wenn der Kehrwert, also der Nenner, $f(\omega) = R^2 + (\omega L\text{-}1/(\omega C))^2$, am kleinsten ist; damit liegt nun eine Minimumaufgabe vor. $f'(\omega) = 2 \cdot L^2 \cdot \omega - \frac{2}{C^2}\frac{1}{\omega^3} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;
$f''(\omega) = 2 \cdot L^2 + \frac{6}{C^2}\frac{1}{\omega^4}$; $f''(1/\sqrt{LC}) > 0 \Rightarrow$ Für $\omega_{min} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ist der Nenner $f(\omega)$ am kleinsten und damit $I(\omega)$ am größten

b) Der Nenner ist bei gegebenem R, L und C am kleinsten, wenn $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ gleich null ist.

Dies ist der Fall, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ oder $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

5.101 Zielfunktion: $\varphi(P) = \frac{P}{250+P+6\cdot 10^{-5}\cdot P^2}$ (Einheiten weggelassen), Maximumaufgabe.

$\varphi'(P) = \frac{250+P+6\cdot 10^{-5}\cdot P^2 - P\cdot(1+12\cdot 10^{-5}\cdot P)}{(250+P+6\cdot 10^{-5}\cdot P^2)^2} = \frac{250-6\cdot 10^{-5}\cdot P^2}{(250+P+6\cdot 10^{-5}\cdot P^2)^2} 0$, $250 - 6\cdot 10^{-5}\cdot P^2 = 0 \Rightarrow$
$P_1 = 2041{,}2$ (die negative Lösung ist sachlich ohne Interesse); Nachweis, dass bei P_1 ein Maximum unter Vermeidung der zweiten Ableitung: $\varphi'(P)$ wechselt bei $P_1 = 2041{,}2$ das Vorzeichen; für $P < 2041{,}2$ ist $250 - 6\cdot 10^{-5}\cdot P^2$ und damit auch $\varphi'(P) > 0$, für $P > 2041{,}2$ ist $250 - 6\cdot 10^{-5}\cdot P^2$ und damit auch $\varphi'(P) < 0$; d.h. $\varphi(P)$ steigt bis P_1 und fällt dann; also liegt dort ein lokales Maximum: $P_{max} = 2041{,}2\ W \approx 2041\ W$.

5.102 Zielfunktion: $A = y^2 + 4x\cdot y$; Maximumaufgabe;
Nebenbedingung: $r^2 = (x + y/2)^2 + (y/2)^2$, $x^2 + x\cdot y + y^2/2 - r^2 \Rightarrow x = -y/2 + \sqrt{r^2 - y^2/4}$ (die Lösung $x = -y/2 - \sqrt{r^2 - y^2/4}$ würde bedeuten, dass x nicht positiv ist).
$A(y) = y^2 + 4y \cdot \left(-y/2 + \sqrt{r^2 - y^2/4}\right) = 2y \cdot \sqrt{4r^2 - y^2} - y^2$; $A' = \frac{8r^2 - 4y^2 - 2y\cdot\sqrt{4r^2 - y^2}}{\sqrt{4r^2 - y^2}} = 0$,
$8r^2 - 4y^2 - 2y\cdot\sqrt{4r^2 - y^2} = 0$; $(4r^2 - 2y^2)^2 = y^2\cdot(4r^2 - y^2)$; $5y^4 - 20\cdot r^2\cdot y^2 + 16r^4 = 0$;
Substitution $u = y^2$: $5u^2 - 20\cdot r^2\cdot u + 16r^4 = 0 \Rightarrow u_1 = 1{,}1056\cdot r^2$; $u_2 = 2{,}894\cdot r^2$; $y^2 = 1{,}1056 \Rightarrow$
$y_1 = 1{,}051\cdot r$ (die negative Lösung ist sachlich nicht möglich); $y^2 = 2{,}894\cdot r^2 \Rightarrow y_2 = 1{,}701\cdot r$ (die negative Lösung ist sachlich nicht möglich);
$x_1 = -y_1/2 + \sqrt{r^2 - y_1^2/4} = 0{,}325\cdot r$; $x_2 = -y_2/2 + \sqrt{r^2 - y_2^2/4} = -0{,}325\cdot r$ (sachlich nicht möglich); daher kommen nur y_1 und x_1 als Maximumstellen in Frage. Das dies der Fall ist, erkennt man unter Vermeidung der Bildung der zweiten Ableitung daran, dass $A'(y) > 0$ für $y < y_1$ sowie $A'(y) < 0$ für $y > y_1$: $x_{max} = 0{,}325\cdot r$; $y_{max} = 1{,}051\cdot r$. $A_{max} = y_1^2 + 4x_1\, y_1 = 2{,}472\cdot r^2$; $A_{Kreis} = \pi\cdot r^2$; $A_{max}/A_{Kreis} = 0{,}787 = 78{,}7\%$.

5.103 Zielfunktion: $P(R) = U_0^2 \cdot \frac{R}{(R+R_i)^2}$, Maximumaufgabe. Vereinfachte Zielfunktion

$f(R) = \frac{R}{(R+R_i)^2}$; $f'(R) = \frac{R_i - R}{(R+R_i)^3} = 0 \Rightarrow R = R_i$; $f''(R) = \frac{2R - 4R_i}{(R+R_i)^4}$; $f''(R_i) = -\frac{1}{8R_i^3} < 0 \Rightarrow$
$R_{max} = R_i$: maximale Leistungsaufnahme, wenn der Verbraucherwiderstand R gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist.

6 Integralrechnung

6.1 a) $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 2$; $\Delta x = (2–0)/4 = 0{,}5$;

$U_4 = \Delta x \cdot [f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)] = 0{,}5 \cdot [2 + 2{,}25 + 2{,}5 + 2{,}75] = 4{,}75$

$O_4 = \Delta x \cdot [f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)] = 0{,}5 \cdot [2{,}25 + 2{,}5 + 2{,}75 + 3] = 5{,}25$

b) $f(x) = -2x + 15$; $\Delta x = (5–2)/6 = 0{,}5$.

Die Funktion ist im Integrationsintervall nicht negativ sowie monoton fallend, daher sind für die Untersumme die rechten Ränder, für die Obersumme die linken Ränder der Teilintervalle zu nehmen.

$U_6 = \Delta x \cdot [f(2{,}5) + f(3) + ... + f(5)] = 0{,}5 \cdot [10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5] = 22{,}5$

$O_6 = \Delta x \cdot [f(2) + f(2{,}5) + ... + f(4{,}5)] = 0{,}5 \cdot [11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6] = 25{,}5$

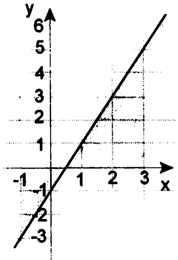
c) $f(x) = x^2$; $\Delta x = (0 - (-3))/5 = 0{,}6$; im Integrationsintervall nicht negativ sowie monoton fallend;

$U_5 = \Delta x \cdot [f(-2{,}4) + f(-1{,}8) + ... + f(0)] = 0{,}6 \cdot [5{,}76 + 3{,}24 + 1{,}44 + 0{,}36 + 0] = 6{,}48$

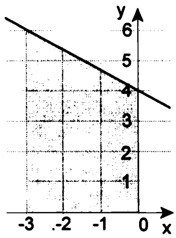
$O_5 = \Delta x \cdot [f(-3) + f(-2{,}4) + ... f(-0{,}6)] = 11{,}88$

d) $f(x) = x^3$; $\Delta x = (2 - 0)/4 = 0{,}5$; $U_4 = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}125 + 1 + 3{,}375) = 2{,}25$; $O_4 = 6{,}25$

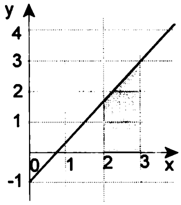
6.2



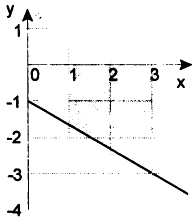
Zu a)



zu b)



zu c)



zu d)

Integration durch elementare Bestimmung von *orientierten* Flächeninhalten (Dreiecken, Rechtecken, ...).

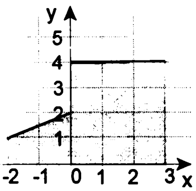
a) $\int_{-1}^{3}(2x-1)\,dx = -\frac{1{,}5 \cdot 3}{2} + \frac{2{,}5 \cdot 5}{2} = 4$

b) $\int_{-3}^{0}\left(-\frac{2}{3} \cdot x + 4\right)dx = 3 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 15$

c) $\int_{2}^{3}\left(\frac{4}{3} \cdot x - 1\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + 3\right) \cdot 1 = \frac{7}{3}$

d) $\int_{1}^{3}\left(-\frac{2}{3} \cdot x - 1\right)dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + 3\right) \cdot 2 = -\frac{14}{3}$

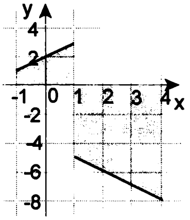
6.3 a)



$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 15$

b)



$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot (1+3) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (5+8) \cdot 3 = -\frac{31}{2}$

6.4 a) $\Delta x = 2/n$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1\cdot\Delta x$; $x_2 = 2\cdot\Delta x$; $x_3 = 3\cdot\Delta x$; ... ; $x_{n-1} = \Delta x = (n-1)\cdot\Delta x$;

$$U_n = \Delta x\cdot[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] = 2/n\cdot[2\cdot 0^2 + 2\cdot(1\cdot\Delta x)^2 + 2\cdot(2\cdot\Delta x)^2 + 2\cdot((n-1)\cdot\Delta x)^2] =$$

$$= 2/n\cdot[2\cdot(1\cdot 2/n)^2 + 2\cdot(2\cdot 2/n)^2 + 2\cdot((n-1)\cdot 2/n)^2] = \frac{16}{3}\cdot\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right] =$$

(siehe Lehrbuch Seite 194) $= \dfrac{16}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} = \dfrac{8\cdot(2n^3-3n^2+n)}{3\cdot n^3} = \dfrac{8}{3}\cdot\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$;

$$\int_0^2 2x^2\,dx = \frac{8}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{16}{3}$$

b) $\Delta x = \dfrac{2}{n}$; $U_n = \dfrac{2}{n}\cdot\left[\left(1+0^2\right)+\left(1+1^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)+\left(1+2^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)+\cdots+\left(1+(n-1)^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)\right] =$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[n+\frac{4}{n^2}\cdot\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)\right] = \frac{2}{n}\cdot\left(n+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{3}\right) = \frac{2\cdot\left(7n^3-6n^2+2n\right)}{3\cdot n^3};$$

$$\int_0^2 (1+x^2)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \frac{14}{3}$$

c) $\Delta x = \dfrac{2}{n}$; $U_n = \dfrac{2}{n}\cdot\left[\left(0+0^2\right)+\left(1\cdot\dfrac{2}{n}+1^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)+\left(2\cdot\dfrac{2}{n}+2^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)+\cdots+\left((n-1)\cdot\dfrac{2}{n}+(n-1)^2\cdot\dfrac{4}{n^2}\right)\right] =$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[\frac{2}{n}\cdot\left(1+2+\ldots+(n-1)\right)+\frac{4}{n^2}\cdot\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)\right] = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right);\quad \int_0^2\left(x+x^2\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

d) $\Delta x = \dfrac{2}{n}$; $U_n = \dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{8}{n^3}\cdot\left[0^3+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right] = \dfrac{16}{n^4}\cdot\dfrac{(n-1)^2\cdot n^2}{4} = 4\cdot\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$;

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 4$$

6.5 Die Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante; daher ist die Anzeige zutreffend. a) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}+1$ b) $\sin^2 x = -\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x+\dfrac{1}{2}$

6.6 a) $\dfrac{x^4}{4}+C$ b) $\dfrac{x^6}{6}+C$ c) $\dfrac{x^2}{2}+C$ d) $x+C$ e) C

f) $\ln|x|+C$ g) $-\dfrac{1}{x}+C$ h) $-\dfrac{1}{2x^2}+C$ i) $\dfrac{x^5}{5}+C$ j) $\ln|x|+C$

6.7 a) $\int x^{1/3}dx = \dfrac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C = \dfrac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+C = \dfrac{3}{4}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}+C$ b) $\int x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x}+C$

c) $\int x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x}+C$ d) $\int x^{3/2}\,dx = \dfrac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}+C = \dfrac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}+C = \dfrac{2}{5}\cdot x^2\cdot\sqrt{x}+C$

e) $\int x^{3/4}\,dx = \dfrac{4}{7}\cdot x^{\frac{7}{4}}+C = \dfrac{4}{7}\cdot\sqrt[4]{x^7}+C = \dfrac{4}{7}\cdot x\cdot\sqrt[4]{x^3}+C$

f) $\int x^{2/3}\,dx = \dfrac{3}{5}\cdot x^{5/3}+C = \dfrac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5}+C = \dfrac{3}{5}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$ g) $\int x^{-2/3}\,dx = 3\cdot\sqrt[3]{x}+C$

h) $\int x^{-1/6}\,dx = \dfrac{6}{5}\cdot x^{5/6}+C = \dfrac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}+C$

6.8 a) $-\cos x + C$ b) $\sin x + C$ c) $e^x + C$ d) $\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$

e) $\dfrac{(1/3)^x}{\ln(1/3)}+C=\dfrac{1/3^x}{\ln 1-\ln 3}+C=\dfrac{3^{-x}}{-\ln 3}+C=-\dfrac{1}{3^x\ln 3}+C$

f) $\int(1/4)^x\,dx=\dfrac{(1/4)^x}{\ln(1/4)}+C=-\dfrac{4^{-x}}{\ln 4}+C$

g) $\tan x + C$ h) $-\cot x + C$ i) $\arctan x + C$ j) $\operatorname{ar\,sinh} x + C$

6.9 a) $F(x)=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C\,;F(3)=\dfrac{3^3}{3}+C=10\;\Rightarrow\;C=1;\quad F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$

b) $F(x)=\int\dfrac{1}{x^3}dx=-\dfrac{1}{2\cdot x^2}+C\,;\;F(1)=-\dfrac{1}{2\cdot 1^2}+C=2\;\Rightarrow\;C=\dfrac{5}{2};\quad F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $F(x)=\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\cdot\sqrt{x}+C;\;F(4)=5=4+C\;\Rightarrow\;C=1;\quad F(x)=2\cdot\sqrt{x}+1$

d) $F(x)=\int e^x\,dx=e^x+C;\;F(0)=3=1+C\;\Rightarrow\;C=2;\;F(x)=e^x+2$

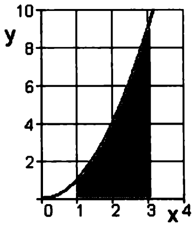
e) $F(x)=\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+C;\;F(e)=4=1+C\;\Rightarrow\;C=3;\quad F(x)=\ln|x|+3$

f) $F(x)=\int 2^x\,dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C;\;F(1)=3=\dfrac{2}{\ln 2}+C\;\Rightarrow\;C=0{,}1147;\quad F(x)=1{,}4427\cdot 2^x+0{,}1146$

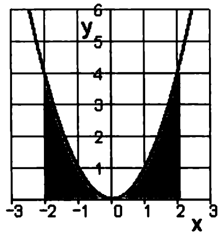
g) $F(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C;\;F(\pi)=2=1+C\;\Rightarrow\;C=1;\quad F(x)=-\cos x+1$

h) $F(x)=\int\sinh x\,dx=\cosh x+C;\;F(-1)=\;2=1{,}5431+C\;\Rightarrow\;C=0{,}4569;$
$F(x)=\cosh x+0{,}4569$

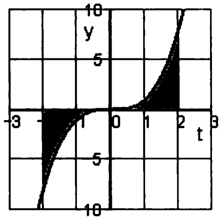
6.10



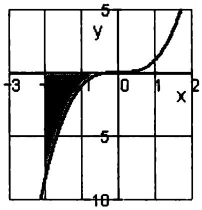
Zu a)



zu b)



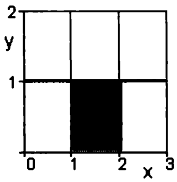
zu c)



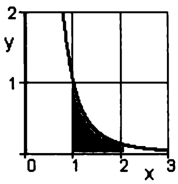
zu d)

a) $\int_1^3 x^2\,dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3=\left[9-\dfrac{1}{3}\right]=\dfrac{26}{3}\approx 8{,}667$ b) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left[\dfrac{8}{3}-\left(-\dfrac{8}{3}\right)\right]=\dfrac{16}{3}\approx 5{,}333$

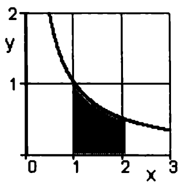
c) $\int_{-2}^{2} t^3\,dt=\left[\dfrac{t^4}{4}\right]_{-2}^{2}=[4-4]=0$ d) $\int_{-2}^{0} x^3\,dx=\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0}=[0-4]=-4$



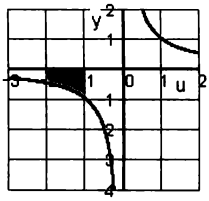
zu e)



zu f)



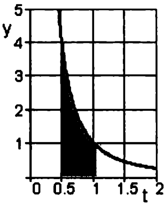
zu g)



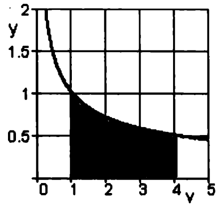
zu h)

6.10 e) $\int\limits_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = [2-1] = 1$ f) $\int\limits_1^2 x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}-1\right] = \frac{3}{8}$

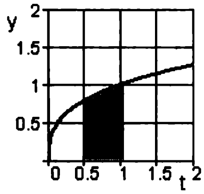
g) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dt = [\ln x]_1^2 = [\ln 2 - 0] = 0{,}693$ h) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{u}\,du = [\ln|u|]_{-2}^{-1} = [\ln|-1| - \ln|-2|] = -\ln 2$



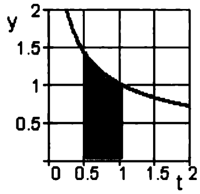
zu i)



zu j)



zu k)

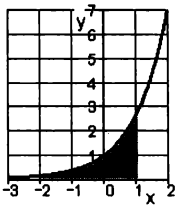


zu l)

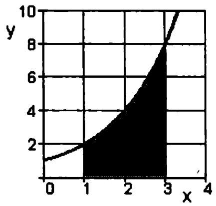
i) i) $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{t^2}\,dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_{0,5}^{1} = -[1-2] = 1$ j) $\int\limits_1^4 \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv = 2\cdot\left[\sqrt{v}\right]_1^4 = 2\cdot[2-1] = 2$

k) $\int\limits_{0,5}^{1} \sqrt[3]{t}\,dt = \left[\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{t^4}\right]_{0,5}^{1} = \frac{3}{4}\cdot[1-0{,}397] = 0{,}452$ l) $\int\limits_{0,5}^{1} \sqrt{\frac{1}{t}}\,dt = 2\cdot\left[\sqrt{t}\right]_{0,5}^{1} = 2\cdot[1-0{,}707] = 0{,}586$

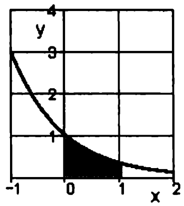
6.11



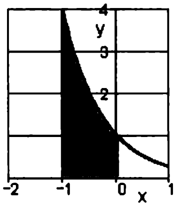
Zu a)



zu b)



zu c)

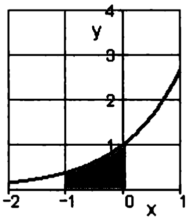


zu d)

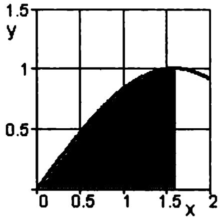
a) $\int\limits_{-2}^{1} e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-2}^{1} = e^2 - e^1 = 2{,}583$ b) $\int\limits_1^3 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\left[2^x\right]_1^3 = \frac{1}{\ln 2}\cdot[8-2] = 8{,}656$

c) $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\ln(1/3)}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]_0^1 = \frac{-1}{\ln 3}\cdot\left[\frac{1}{3}-1\right] = 0{,}607$

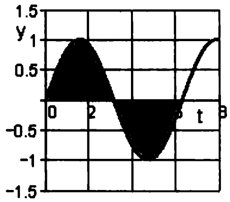
d) $\int\limits_{-1}^{0} 4^{-x}\,dx = \int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^x dx = \frac{1}{\ln(1/4)}\cdot\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]_{-1}^{0} = \frac{-1}{\ln 4}\cdot[1-4] = 2{,}164$



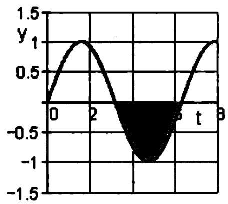
zu e)



zu f)



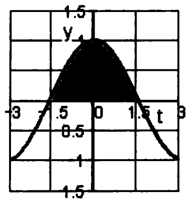
zu g)



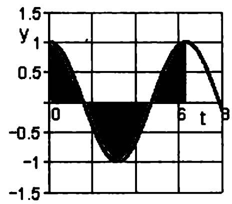
zu h)

e) $\int\limits_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -[1-e] = 1{,}718$ f) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^{\pi/2} = -[0-1] = 1$

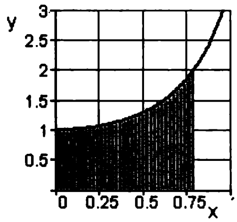
g) $\int\limits_0^{2\pi} \sin t\,dt = -[\cos]_0^{2\pi} = -[1-1] = 0$ h) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin t\,dt = -[\cos]_{\pi}^{2\pi} = -[1-(-1)] = -2$



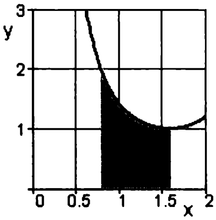
zu i)



zu j)



zu k)



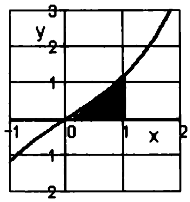
zu l)

i) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = [1-(-1)] = 2$

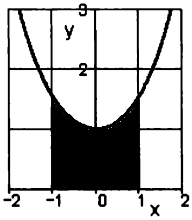
j) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos t \, dt = [\sin t]_{0}^{2\pi} = [0-0] = 0$

k) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_{0}^{\pi/4} = 1$

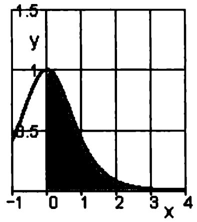
l) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = -[\cot]_{\pi/4}^{\pi/2} = 1$



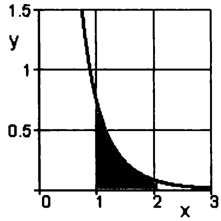
zu m)



zu n)



zu o)



zu p)

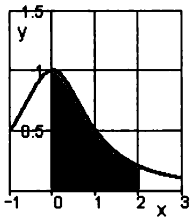
m) $\int\limits_{0}^{1} \sinh x \, dx = [\cosh x]_{0}^{1} = 0{,}543$

n) $\int\limits_{-1}^{1} \cosh x \, dx = [\sinh x]_{-1}^{1} = 2{,}350$

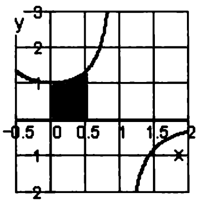
o) $\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = [\tanh x]_{0}^{3} = 0{,}995$

p) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -[\coth x]_{1}^{2} = 0{,}276$

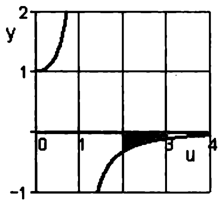
6.12



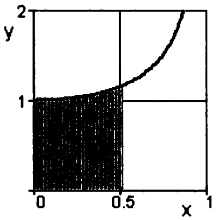
Zu a)



zu b)



zu c)



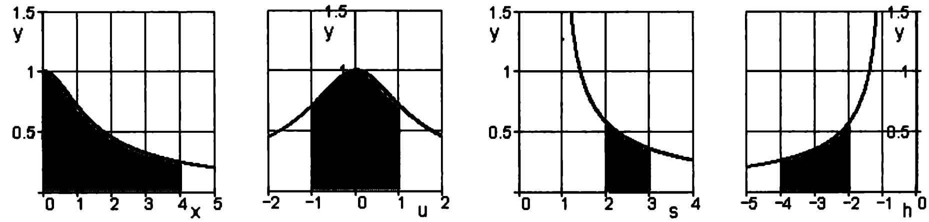
zu d)

a) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{0}^{2} = 1{,}11$

b) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \frac{|1+x|}{|1-x|} \right]_{0}^{0,5} = 0{,}55$

c) $\int\limits_{2}^{3} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \frac{|1+u|}{|1-u|} \right]_{2}^{3} = -0{,}21$

d) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{0}^{0,5} = 0{,}52$



zu e) zu f) zu g) zu h)

e) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_0^4 = 2{,}09$ f) $\int\limits_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \left[\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\right]_{-1}^1 = 1{,}76$

g) $\int\limits_2^3 \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \left[\ln\left|s+\sqrt{s^2-1}\right|\right]_{-1}^1 = 0{,}44$ h) $5\int\limits_{-2}^{-4} \frac{dh}{\sqrt{h^2-1}} = \left[\ln\left|h+\sqrt{h^2-1}\right|\right]_{-2}^{-4} = -0{,}74$

6.13 a) $a\cdot\int e^x\,dx = a\cdot e^x + C$ b) $3\cdot\int\frac{dx}{1+x^2} = 3\cdot\arctan x + C$ c) $5\cdot\int 1\,dx = 5x + C$

d) $\frac{1}{2}\cdot\int\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{x^3} + C = \frac{1}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x} + C$ e) $\frac{5}{6a}\cdot\int\cos x\,dx = \frac{5}{6a}\cdot\sin x + C$

f) $\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\ln|x| + C$ g) $\frac{1}{3}\cdot\int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3u} + C$ h) $\ln 2\cdot\int x\,dx = \frac{\ln 2}{2}\cdot x^2 + C$

i) $\int x^{5/2}\,dx = \frac{2}{7}\cdot x^{7/2} + C = \frac{2}{7}\cdot x^3\cdot\sqrt{x} + C$ j) $b\cdot\int\frac{dx}{\cos^2 x} = b\cdot\tan x + C$

k) $\frac{1}{2s}\cdot\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2s}\cdot\cot x + C$ l) $\frac{1}{2\cdot\sin^2 x}\cdot\int\frac{ds}{s} = \frac{\ln|s|}{2\cdot\sin^2 x} + C$

6.14 a) $2\cdot\int x^3 dx - 4\cdot\int x\,dx + 5\cdot\int 1\,dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 5x + C$ b) $\frac{5}{3}\cdot\int x\,dx - \frac{1}{3}\cdot\int 1\,dx = \frac{5x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$

c) $2\cdot\ln|x| - \frac{1}{x} + C$ d) $\frac{1}{2}\cdot\int(2t-1)\,dt = \frac{t}{2}\cdot(t-1) + C$ e) $\int\left(1+\frac{3}{x}\right)dx = x + 3\cdot\ln|x| + C$

f) $\int(x^3+x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$ g) $\frac{t^2}{2} + 2e^2\cdot t + C$ h) $\int 0\,dx = C$

6.15 a) $\int\frac{2-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx = 4\cdot\sqrt{x} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$

b) $\int\frac{(2x+3)^2}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(2x^2 + 12x + 9\cdot\ln|x|\right) + C$

c) $\int\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)dx = \int\left(2x + x^{1/2} + x^{3/2}\right)dx = x^2 + \frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x} + \frac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x} + C$

d) $\int\frac{3}{2+2x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\arctan x + C$

6.16 a) $2u\cdot\int 1\,dx + \int x\,dx = 2u\cdot x + \frac{x^2}{2} + C$ b) $2\cdot\int u\,du + x\cdot\int 1\,du = u^2 + x\cdot u + C$

c) $\frac{2}{b+1}\cdot\int x\,dx = \frac{x^2}{b+1} + C$ d $\int\frac{2+s}{x}\,dx = (2+s)\cdot\int\frac{1}{x}\,dx = (2+s)\cdot\ln|x| + C$

e) $\frac{u+2}{1-a}\cdot\int e^t\,dt = \frac{u+2}{1-a}\cdot e^t + C$ f) $\frac{e^t}{1-a}\cdot\left(\int u\,du + 2\cdot\int du\right) = \frac{e^t}{1-a}\cdot\left(\frac{u^2}{2} + 2u\right) + C$

g) $\int 1\,dt - \frac{2}{1+r^2}\cdot\int t\,dt = t - \frac{t^2}{1+r^2} + C$ h) $\int 1\,dr - 2t\cdot\int\frac{1}{1+r^2}\,dr = r - 2t\cdot\arctan r + C$

6.17 a) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int dx = \tan x + x + C$ b) $6 \cdot \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int dx = 6 \cdot \tan x + x + C$

c) $\frac{1}{3} \cdot \arcsin x + C$ d) $\frac{1}{3} \cdot \operatorname{ar\,cosh} x + C$

6.18 a) $\sqrt{2} \cdot \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} + C$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3} + C = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C = \frac{x \cdot \sqrt{2x}}{3} + C$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ar\,sinh} x + C$ d) $e \cdot \int e^x\,dx = e \cdot e^x + C = e^{x+1} + C$

e) $\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int dx = x + C$ f) $2 \cdot \int \frac{\sin t \cdot \cos t}{\sin t}\,dt = 2 \cdot \int \cos t\,dt = 2 \cdot \sin t + C$

g) $2 \cdot \int \frac{\sin t \cdot \cos t}{\cos t}\,dt = 2 \cdot \int \sin t\,dt = -2 \cdot \cos t + C$ h) $\tan x + C$ i) $-\cot t + C = -\frac{1}{\tan t} + C$

j) $\int \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right) dt = \int \left(1 - \tan^2 t\right) dt = \int 1\,dt - \int \left(1 + \tan^2 t - 1\right) dt =$

$= \int 1\,dt - \int \left(1 + \tan^2 t\right) dt + \int 1\,dt = t - \tan t + t + C = 2t - \tan t + C$

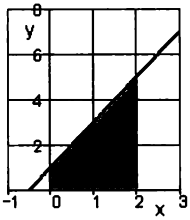
k) $\int \sin(t+1)\,dt = \int (\sin t \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot \cos t)\,dt = \cos 1 \cdot \int \sin t\,dt + \sin 1 \cdot \int \cos t\,dt =$

$= \cos 1 \cdot (-\cos t) + \sin 1 \cdot \sin t + C = -\cos(t+1) + C$

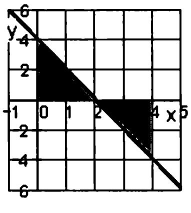
l) $\int \cos(t-1)\,dt = \int (\cos t \cdot \cos 1 + \sin t \cdot \sin 1)\,dt = \cos 1 \cdot \int \cos t\,dt + \sin 1 \cdot \int \sin t\,dt =$

$= \cos 1 \cdot \sin t - \sin 1 \cdot \cos t = \sin(t-1) + C$

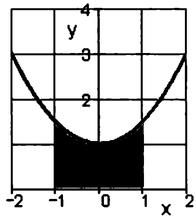
6.19



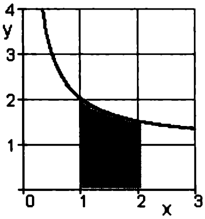
Zu a)



zu b)



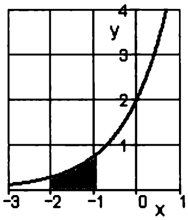
zu c)



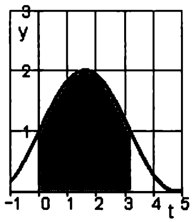
zu d)

a) $\int_0^2 (2x+1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_0^2 = 6$ b) $\int_0^4 (4-2x)\,dx = \left[4x - x^2\right]_0^4 = 0$

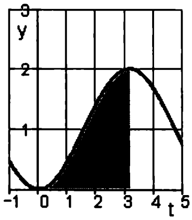
c) $\int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + x\right]_{-2}^{2} = \frac{7}{3}$ d) $\int_1^2 \frac{x+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[x + \ln|x|\right]_1^2 = 1{,}693$



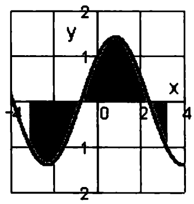
zu e)



zu f)



zu g)



zu h)

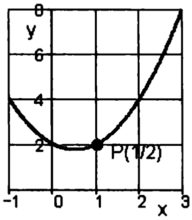
6.19 e) $\int\limits_{-2}^{-1} 2\cdot e^x\,dx = 2\cdot\left[e^x\right]_{-2}^{-1} = 0{,}465$

f) $\int\limits_{0}^{\pi}(1+\sin t)\,dt = \left[t+\cos t\right]_0^{\pi} = \pi + 2 = 5{,}142$

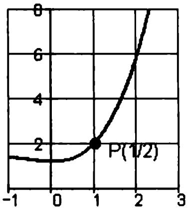
g) $\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos t)\,dt = \left[t+\sin t\right]_0^{\pi} = \pi \approx 3{,}142$

h) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos x)\,dx = \left[\cos x - \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

6.20 a) $y(x) = \int(2x-1)\,dx =$
$= x^2 - x + C;$
$y(1) = 1^2 - 1 + C = 2$
$\Rightarrow C = 2;$
$y(x) = x^2 - x + 2$



b) $y(x) = \int(x^2 + x)\,dx =$
$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C;$
$y(1) = \dfrac{1^3}{3} + \dfrac{1^2}{2} + C = 2$
$\Rightarrow C = 7/6;$
$y(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{6}$



6.21 a) $s(t) = \int(v_0 - g\cdot t)dt = v_0\cdot t - g\cdot\dfrac{t^2}{2} + C;\ s(0) = C = 10;$

Höhe zur Zeit t: $s(t) = v_0\cdot t - g\cdot\dfrac{t^2}{2} + 10 = 30t - 5t^2 + 10$

b) Größte Flughöhe s_{max}, wenn $v = \dfrac{ds}{dt} = s'(t) = 0$: $s'(t) = 30 - 10\cdot t = 0 \Rightarrow t = 3$ s;

$s_{max} = s(3) = 55$ m. Zeitpunkt des Auftreffens am Boden: $s = 0$; $30t - 5t^2 + 10 = 0 \Rightarrow$
$t_1 = 6{,}31$ s; ($t_2 = -0{,}32$ s kommt sachlich nicht in Frage)

6.22 a) $u = 1 - 3x;\ \dfrac{du}{dx} = -3 \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{3}\cdot du;$

$$\int(1-3x)^3dx = -\frac{1}{3}\cdot\int u^3du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{12}\cdot(1-3x)^4 + C$$

b) $u = 3 + 2x;\ \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\cdot du;\ \int(3+2x)^4dx = \dfrac{1}{2}\cdot\int u^4du = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u^5}{5} + C = \dfrac{1}{10}\cdot(3+2x)^5 + C$

c) $u = 1 - x;\ \dfrac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ \int\sqrt{1-x}\,dx = -\int\sqrt{u}\,du = -\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{u^3} = -\dfrac{2}{3}\cdot(1-x)\cdot\sqrt{1-x} + C$

d) $u = 1 - x;\ \dfrac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ \int\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\int\dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du = -2\cdot\sqrt{u} + C = -2\cdot\sqrt{1-x} + C$

6.23 a) $u = 2 + x;\ \dfrac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du;\ 2\cdot\int\dfrac{1}{2+x}dx = 2\cdot\int\dfrac{1}{u}du = 2\cdot\ln|u| + C = 2\cdot\ln|2+x| + C$

b) $u = 2x - t;\ \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}du;\ \int\dfrac{1}{2x-t}dx = \dfrac{1}{2}\cdot\int\dfrac{1}{z}\,du = \dfrac{1}{2}\cdot\ln|u| + C = \dfrac{1}{2}\cdot\ln|2x-t| + C$

c) $u = 2x - t;\ \dfrac{du}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -du;\ \int\dfrac{1}{2x-t}dt = -\int\dfrac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|2x-t| + C$

d) $u = a + 2x;\ \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\cdot du;\ 2a\cdot\int\dfrac{1}{a+2x}\,dx = a\cdot\int\dfrac{1}{u}\,du = a\cdot\ln|u| + C = a\cdot\ln|a+2x| + C$

6.24 a) $u = x - 1;\ \dfrac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du;\ 4\cdot\int\dfrac{1}{(x-1)^2}dx = 4\cdot\int\dfrac{1}{u^2}\,du = -4\cdot\dfrac{1}{u} + C = -\dfrac{4}{x-1} + C$

b) $u = 2x - a;\ \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\cdot du;\ \int\dfrac{1}{(2x-a)^2}dx = \dfrac{1}{2}\cdot\int\dfrac{1}{u^2}\,du = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{u} + C = -\dfrac{1}{2\cdot(2x-a)} + C$

6.24 c) $u = 3+5x;\ \frac{du}{dx} = 5 \Rightarrow dx = \frac{1}{5}\cdot du;\ 5\cdot\int\frac{5}{\sqrt{3+5x}}dx = \frac{5}{5}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\cdot\sqrt{u}+C = 2\cdot\sqrt{3+5x}+C$

d) $u = 4x-1;\ dx = \frac{1}{4}\cdot du;\ 2\cdot\int\frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}}\ dx = \frac{2}{4}\cdot\int\frac{1}{\sqrt[3]{u}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{u^2}+C = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(4x-1)^2}+C$

6.25 a) $u = 2x+3;\ \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;\ \int e^{2x+3}dx = \cdot\int e^u\ du + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x+3}+C$

b) $u = -x;\ \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ \int e^{-x}dx = -\int e^u\ du = -e^u + C = e^{-x}+C$

c) $u = 3x;\ \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\cdot du;\ \int(e^x)^3 dx = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\cdot\int e^u\ du = \frac{1}{3}\cdot e^u + C = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}+C$

d) $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\cdot e^{3x}$ nach c), ohne Integrationskonstante; $u = -3x;\ \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3 \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}\cdot du$

$\int e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}\cdot\int e^u\ du = -\frac{1}{3}\cdot e^{-3x}$, ohne Integrationskonstante;

$\int\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)dx = \int e^{3x}\ dx - \int e^{-3x}\ dx = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)+C$

6.26 a) $u = 2x;\ \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;$

$\int 2\cdot\frac{10^{x+2}}{10^{-x}}dx = 200\cdot\int 10^{2x}dx = 100\cdot\int 10^u\ du = \frac{100}{\ln 10}\cdot 10^u + C = \frac{100}{\ln 10}\cdot 10^{2x}+C$

b) $u = 2t;\ \frac{du}{dt} = 2 \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\cdot du;\ \int 2a^t\cdot(a^t+1)\cdot\ln a\ dt = 2\cdot\ln a\cdot\left(\int a^{2t}\ dt + \int a^t\ dt\right) =$

$= 2\cdot\ln a\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\int a^u\ du + \int a^t\ dt\right) = 2\cdot\ln a\cdot\left(\frac{a^u}{2\cdot\ln a}+\frac{a^t}{\ln a}\right)+C = a^{2t}+2\cdot a^t + C$

c) $\int\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}dx = \int\left(e^x+1\right)dx = e^x + x + C$

d) $u = 3t;\ \frac{du}{dt} = 3 \Rightarrow dt = \frac{1}{3}\cdot du;\ \int\sin(3t)dt = \frac{1}{3}\cdot\int\sin u\ du = -\frac{1}{3}\cdot\cos u + C = -\frac{1}{3}\cdot\cos 3t + C$

6.27 a) $u = 2t-1 \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\cdot du;\ \int\sin(2t-1)\ dt = \frac{1}{2}\cdot\int\sin u\ du = -\frac{1}{2}\cdot\cos u + C = -\frac{1}{2}\cdot\cos(2t-1)+C$

b) $u = 10t+\varphi \Rightarrow dt = \frac{1}{10}\cdot du;\ \int\cos(10t+\varphi)\ dt = \frac{1}{10}\cdot\int\cos u\ du = \frac{1}{10}\cdot\sin u + C = \frac{1}{10}\cdot\sin(10t+\varphi)+C$

c) $u = \omega t+\varphi \Rightarrow dt = \frac{1}{\omega}\cdot du;\ \frac{1}{\omega}\cdot\int\sin u\ du = -\frac{1}{\omega}\cdot\cos u + C = -\frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi)+C$

d) $\int(1-\cos 2t)\ dt = \int dt - \int\cos 2t\ dt;\ u = 2t;\ \frac{du}{dt} = 2 \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\cdot du;$

$\int dt - \frac{1}{2}\cdot\int\cos u\ du = t - \frac{1}{2}\cdot\sin u + C = t - \frac{1}{2}\cdot\sin(2t)+C$

6.28 a) $u = 2x+4 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;\ \ 2\cdot\int\frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{2}du = \tan u + C = \tan(2x+4)+C$

b) $u = 2t \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\cdot du;\ \ \int\sinh u\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot\cosh u + C = \frac{1}{2}\cdot\cosh(2t)+C$

c) $u = 3t \Rightarrow dt = \frac{1}{3}\cdot du;\ \ \int\cosh u\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\cdot\sinh u + C = \frac{1}{3}\cdot\sinh(3t)+C$

d) $u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;\ \ \int\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot\arctan u + C = \frac{1}{2}\cdot\arctan(2x)+C$

6.29 a) $\int \frac{1}{3+2x^2}dx = \int \frac{1}{3\cdot\left[1+\frac{2x^2}{3}\right]}dx = \int \frac{1}{3\cdot\left[1+\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right]}dx;\quad u = x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot du;$

$$\int \frac{1}{3\cdot\left[1+u^2\right]}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\int\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\arctan\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C$$

b) $\int \frac{3}{1-4x^2}dx = 3\cdot\int\frac{1}{1-(2x)^2}dx;\quad u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;$

$$3\cdot\int\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{3}{4}\cdot\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C = \frac{3}{4}\cdot\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C = \frac{3}{4}\cdot\left(\ln|2x+1|-\ln|2x-1|\right)+C$$

c) $\int\frac{3}{3-8x^2}dx = 3\cdot\int\frac{1}{3\cdot\left(1-8x^2/3\right)}dx = \int\frac{1}{1-\left(x\cdot\sqrt{8/3}\right)^2}dx;\quad u = x\cdot\sqrt{8/3} \Rightarrow dx = \sqrt{3/8}\cdot du$

$$\int\frac{1}{1-u^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}du = \sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C = \sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x\cdot\sqrt{8/3}}{1-x\cdot\sqrt{8/3}}\right|+C =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{1+x\cdot\sqrt{8/3}}{1-x\cdot\sqrt{8/3}}\cdot\frac{3}{3}\right|+C = \frac{\sqrt{6}}{8}\cdot\ln\left|\frac{3+2\sqrt{6}\cdot x}{3-2\sqrt{6}\cdot x}\right|+C = \frac{\sqrt{6}}{8}\cdot\ln\left|\frac{2\sqrt{6}\cdot x+3}{2\sqrt{6}\cdot x-3}\right|+C$$

d) $\int\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx;\quad u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\cdot du;\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C$

6.30 a) $\int\frac{1}{\sqrt{3-8x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{3\cdot\left(1-8x^2/3\right)}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\left(x\cdot\sqrt{8/3}\right)^2}}dx;\quad u = x\cdot\sqrt{8/3} \Rightarrow dx = \sqrt{3/8}\cdot du;$

$$\int\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-u^2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}du = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\arcsin\left(x\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}\right)+C = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\arcsin\left(\frac{2x}{3}\cdot\sqrt{6}\right)+C$$

b) $\int\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx;\quad u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)+C$$

c) $\int\frac{1}{\sqrt{2+5x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{2\cdot\left[1+5x^2/2\right]}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{2\cdot\left[1+\left(x\cdot\sqrt{5/2}\right)^2\right]}}dx;\quad u = x\cdot\sqrt{5/2} \Rightarrow dx = \sqrt{2/5}\cdot du;$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}du = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left(x\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{1+\frac{5x^2}{2}}\right)+C_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\frac{x\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2+5x^2}}{\sqrt{2}}+C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\left(x\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2+5x^2}\right)+C \text{ mit } C = C_1-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\sqrt{2}$$

d) $\int\frac{1}{\sqrt{5x^2-2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{2\cdot\left[5x^2/2-1\right]}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{2\cdot\left[\left(x\cdot\sqrt{5/2}\right)^2-1\right]}}dx;\ u = x\cdot\sqrt{5/2} \Rightarrow dx = \sqrt{2/5}\cdot du;$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}du = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|x\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{5x^2}{2}-1}\right|+C_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\left|\frac{x\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|+C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\left|x\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5x^2-2}\right|+C \text{ mit } C = C_1-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\ln\sqrt{2}$$

6.31 a) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int[1-\cos(2x)]dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\int dx - \int\cos(2x)dx\right];\; u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;$

$\frac{1}{2}\cdot\left[x - \int\cos u\cdot\frac{1}{2}\cdot du\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[x - \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right] + C = \frac{1}{2}\cdot[x - \sin x\cdot\cos x] + C$

b) $u = 5t+1 \Rightarrow dt = \frac{1}{5}\cdot du;\; \int\sin^2 u\cdot\frac{1}{5}du = \frac{1}{10}\cdot\int(1-\cos 2u)du = \frac{1}{10}\cdot[u - \sin u\cdot\cos u] + C_1 =$

$= \frac{1}{10}\cdot[(5t+1) - \sin(5t+1)\cdot\cos(5t+1)] + C_1 = \frac{t}{2} - \frac{1}{10}\cdot\sin(5t+1)\cdot\cos(5t+1) + C,\; C = C_1 + 1/10$

c) $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int(1+\cos(2x))dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\int dx + \int\cos 2x\,dx\right];\; u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot du;$

$\frac{1}{2}\cdot\left[x + \int\cos u\cdot\frac{1}{2}du\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[x + \frac{1}{2}\cdot\sin u\right] + C = \frac{1}{2}\cdot[x + \sin x\cdot\cos x] + C$

d) $u = 10t+3 \Rightarrow dt = \frac{1}{10}du;\cdot \int\cos^2 u\cdot\frac{1}{10}du = \frac{1}{20}\cdot\int(1+\cos 2u)du = \frac{1}{20}\cdot[u + \sin u\cdot\cos u] + C_1 =$

$= \frac{1}{20}\cdot[10t+3+\sin(10t+3)\cdot\cos(10t+3)] + C_1 = \frac{t}{2} + \frac{1}{20}\cdot\sin(10t+3)\cdot\cos(10t+3) + C$

mit $C = C_1 + 3/20$

6.32 a) $u = x/3-3 \Rightarrow dx = 3du;\; \int_{\dots}^{\dots} u^2\cdot 3du = \left[u^3\right]_{\dots}^{\dots} = \left[(x/3-3)^3\right]_0^4 = 22{,}37$

b) $u = 5+4x \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du;\; \int_{\dots}^{\dots} u^3\cdot\frac{1}{4}\cdot du = \frac{1}{16}\cdot\left[u^4\right]_{\dots}^{\dots} = \frac{1}{16}\cdot\left[(5+4x)^4\right]_{-2,5}^{1} = 371$

c) $u = \frac{2}{3} + \frac{x}{4} \Rightarrow dx = 4du;\; \int_{\dots}^{\dots} u\cdot 4du = 2\cdot\left[u^2\right]_{\dots}^{\dots} = 2\cdot\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}\right)^2\right]_0^1 = 0{,}792;$ Lösung hier leicht auch ohne Substitution!

d) $u = x/4+5 \Rightarrow dx = 4du;\; 2\cdot\int_{\dots}^{\dots} u^3\cdot 4du = 2\cdot\left[u^4\right]_{\dots}^{\dots} = 2\cdot\left[(x/4+5)^4\right]_{-3}^{-1} = 365{,}63$

6.33 a) $u = 2+x \Rightarrow dx = du;\; \int_{\dots}^{\dots} u^{1/3}du = \frac{3}{4}\cdot\left[u^{4/3}\right]_{\dots}^{\dots} = \frac{3}{4}\cdot\left[(2+x)^{4/3}\right]_0^4 = 6{,}29$

b) $u = 3-x \Rightarrow dx = -du;\; 2\cdot\int_{\dots}^{\dots}\frac{1}{u}\cdot(-du) = -2\cdot\ln|u|\Big|_{\dots}^{\dots} = -2\cdot\ln|3-x|\Big|_1^2 = 1{,}39$

c) $u = 10+x \Rightarrow dx = du;\quad 3\cdot\int_{\dots}^{\dots}\frac{1}{u^2}du = -3\cdot\left[\frac{1}{u}\right]_{\dots}^{\dots} = -3\cdot\left[\frac{1}{10+x}\right]_{-4}^{4} = 0{,}288$

d) $u = 3-4x; \Rightarrow dx = -\frac{1}{4}\cdot du;\; \int_{\dots}^{\dots} u^{-1/2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)du = -\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{u}\right]_{\dots}^{\dots} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{3-4x}\right]_{-1}^{0,5} = 0{,}205$

6.34 a) $u = 4x-2 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du;\; \int_{\dots}^{\dots} e^u\cdot\frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\cdot\left[e^u\right]_{\dots}^{\dots} = \frac{1}{4}\cdot\left[e^{4x-2}\right]_2^4 = 300\,550{,}21$

b) $u = 2x-2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du;\; \int_{\dots}^{\dots} 3^u\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2\cdot\ln 3}\cdot\left[3^u\right]_{\dots}^{\dots} = \frac{1}{2\cdot\ln 3}\cdot\left[3^{2x-2}\right]_0^4 = 331{,}73$

c) $u = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du;\; \int_{\dots}^{\dots}\sin u\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot[-\cos u]_{\dots}^{\dots} = -\frac{1}{2}\cdot[\cos(2x)]_0^4 = 0{,}573$

d) $u = t/2;\; dt = 2du;\; \int_{\dots}^{\dots}(\sin u + \cos u)\cdot 2du = 2\cdot[-\cos u + \sin u]_{\dots}^{\dots} = 2\cdot[-\cos(t/2) + \sin(t/2)]_0^{\pi} = 4$

6.35 a) Schreibt man $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx$, so entsteht ein Integral, bei dem der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Daher $u = x^2+1$; $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$.

$\cdot\int\frac{x}{u}\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln|u|\right] = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)+C = \ln\sqrt{x^2+1}+C$

b) $\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

$u = x^2+1$; $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$; $\int x\cdot\frac{1}{u^2}\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{2\cdot(x^2+1)}+C$

c) $\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$, Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

$u = 1+x^2$; $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$; $\int x\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\cdot\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\cdot u^{3/2}+C = \frac{1}{3}\cdot\left(1+x^2\right)^{3/2}+C$

d) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$, Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

$u = 1+x^2$; $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$; $\int\frac{x}{\sqrt[3]{u}}\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{\sqrt[3]{u}}du = \frac{3}{4}\cdot u^{2/3}+C = \frac{3}{4}\cdot\left(1+x^2\right)^{2/3}+C$

6.36 a) Typ: Der Zähler ist die Ableitung des Nenners;

$u = 1+e^x$; $\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}du$; $2\cdot\int\frac{e^x}{u}\cdot\frac{1}{e^x}du = \cdot 2\cdot\int\frac{1}{u}\cdot du = 2\cdot\ln|u|+C = 2\cdot\ln\left(1+e^x\right)+C$

b) Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

$u = x^2$; $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$; $\int x\cdot e^u\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\cdot\int e^u du = \frac{1}{2}\cdot e^u = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+C$

c) Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

1\. Lös.variante: $u = \sin t$; $dt = \frac{1}{\cos t}du$; $\int u\cdot\cos t\cdot\frac{1}{\cos t}du = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2+C_1 = \frac{1}{2}\sin^2 t+C_1$;

2\. Lösungsvariante: $u = \cos t$;

$\frac{du}{dt} = -\sin t \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin t}du$; $\int\sin t\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)du = -\int u\cdot du = -\frac{1}{2}\cdot u^2+C_2 = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2 t+C_2$;

3\. Lösungsvariante: $\sin t\cdot\cos t = \frac{1}{2}\cdot\sin 2t$; $u = 2t \Rightarrow dt = du/2$;

$\frac{1}{2}\cdot\int\sin u\cdot\frac{1}{2}du = -\frac{1}{4}\cdot\cos u+C_3 = -\frac{1}{4}\cdot\cos 2t+C_3$;

Die Ergebnisse aller drei Lösungsvarianten unterscheiden sich nur um eine Konstante und bezeichnen daher das gleiche unbestimmte Integral!

d) Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung; $u = \sin t$;

$\frac{du}{dt} = \cos t \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos t}du$; $\int u^3\cdot\cos t\cdot\frac{1}{\cos t}du = \int u^3\cdot du = \frac{1}{4}\cdot u^4+C = \frac{1}{4}\cdot\sin^4 t+C$

6.37 a) Typ: Der Zähler ist (bis auf den Faktor –1) die Ableitung des Nenners;

$u = \cos x \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sin x}du$; $\int_{\dots}^{\dots}\frac{\sin x}{u}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}du\right) = -\int_{\dots}^{\dots}\frac{1}{u}du = -\ln|u|_{\dots}^{\dots} = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0{,}347$

b) Typ: Der Zähler ist die Ableitung des Nenners;

$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du$; $\int\frac{\cos x}{u}\cdot\frac{1}{\cos x}du = \int\frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|\sin x|+C$

c) Typ: Der Zähler ist die Ableitung des Nenners;

$u = 1+\sin x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du$; $\int\frac{\cos x}{u}\cdot\frac{1}{\cos x}du = \int\frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln\left(1+\sin x\right)+C$

6.37 d) Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung;

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du; \int \frac{\cos x}{u^2}\cdot\frac{1}{\cos x}du = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin x} + C$$

6.38 a) $\int \sin^3 t\,dt = \int \sin^2 t\cdot\sin t\,dt = \int (1-\cos^2 t)\cdot\sin t\,dt = -\cos t - \int \cos^2 t\cdot\sin t\,dt;$

$$u = \cos t \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin t}du;\ -\cos t - \int u^2\cdot\sin t\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}du\right) = -\cos t + \int u^2 du = \ldots = ;$$

$$= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + C = -\cos t + \frac{1}{3}\cdot\cos^2 t\cdot\cos t + C = -\frac{1}{3}\cdot\left(2+\sin^2 t\right)\cdot\cos t + C$$

b) $u = \cos x \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sin x}du;\ \int \frac{\sin x}{1+u^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}du\right) = \ldots = -\arctan u = -\arctan(\cos x) + C$

c) $u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du;\ \int \frac{\cos x}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\cos x}du = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u = \arctan(\sin x) + C$

d) $u = \arctan x \Rightarrow dx = (1+x^2)du;\ \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{u}{1+x^2}\cdot(1+x^2)du = \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left[u^2\right]_{\ldots}^{\ldots} = \frac{1}{2}\cdot\left[\arctan^2 x\right]_0^1 = 0{,}308$

6.39 a) $u = \ln x;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\cdot du;\ \int \frac{u}{x}\cdot x\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}\cdot u^2 = \frac{1}{2}\cdot[\ln x]^2 + C$

b) $u = \ln 2x;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\cdot du;\ \int \frac{u}{x}\cdot x\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}\cdot u^2 = \frac{1}{2}\cdot[\ln 2x]^2 + C$

c) $\int_1^4 \frac{\ln x^{1/2}}{x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^4 = 0{,}48$ ... siehe a)

d) $u = \ln x;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du;\ \int \frac{1}{x\cdot u}\cdot x\,du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$

6.40 a) $u = 3+2x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{4x}du;\ \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{x}{u}\cdot\frac{1}{4x}du = \frac{1}{4}\cdot\int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\cdot\left[\ln|u|\right]_{\ldots}^{\ldots} = \frac{1}{4}\cdot\left[\ln(3+2x^2)\right]_1^3 = 0{,}359$

b) $u = 3-8x^2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{16x}\cdot du;\ \int \frac{2x}{u}\cdot\left(-\frac{1}{16x}du\right) = -\frac{1}{8}\cdot\ln|u| = -\frac{1}{8}\cdot\ln\left|3-8x^2\right| + C$

c) $u = 3t \Rightarrow dt = \frac{1}{3}du;\ \frac{1}{3}\cdot\int \tan u\,du = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\sin u}{\cos u}du;$

$$z = \cos u \Rightarrow du = -\frac{1}{\sin u}dz;\ \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\sin u}{z}\left(-\frac{1}{\sin u}dz\right) = \ldots = -\frac{1}{3}\cdot\ln|\cos 3t| + C$$

d) $u = 3t \Rightarrow dt = \frac{1}{3}du;\ \frac{1}{3}\cdot\int \tanh u\,du = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\sinh u}{\cosh u}du;\ z = \cosh u \Rightarrow du = \frac{1}{\sinh u}dz;$

$$\frac{1}{3}\cdot\int \frac{\sinh u}{z}\cdot\frac{1}{\sin u}dz = \ldots = -\frac{1}{3}\cdot\ln|\cosh 3t| + C = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}\right| + C = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|e^{3t}+e^{-3t}\right| + \frac{1}{3}\cdot\ln\frac{1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln\left|e^{-3t}\cdot\left(e^{6t}+1\right)\right| + C_1 = \frac{1}{3}\cdot\left[\ln e^{-3t} + \ln(e^{6t}+1)\right] + C_1 = \frac{1}{3}\cdot\left[-3t + \ln(e^{6t}+1)\right] + C_1,\ C_1 = C + \ln\frac{1}{2}$$

6.41 $A = 2\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, weil Integrand symmetrische Funktion; $x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u\cdot du;$

$$2\cdot\int_{\ldots}^{\ldots} \sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\,du = 2\cdot\int_{\ldots}^{\ldots} \cos^2 u\,du = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[u + \sin u\cdot\cos u\right]_{\ldots}^{\ldots} \text{ (siehe Aufgabe 6.31 c))} =$$

$$= \left[u + \sin u\cdot\sqrt{1-\sin^2 u}\right]_{\ldots}^{\ldots} = \left[\arcsin x + x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.42 a) $u = x,\ u' = 1;\ v' = \cos x,\ v = \sin x;\ \int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\cdot\sin x + \cos x + C$

6.42 b) $u = x,\ u' = 1;\ v' = \sin x,\ v = -\cos x;$

$$\int x \cdot \sin x\, dx = -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

c) $u(t) = t,\ u'(t) = 1;\ \ v'(t) = \sin(2t);\ \ v = \int \sin(2t)dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2t);$

$$\int t \cdot \sin 2t\, dt = -\frac{t}{2} \cdot \cos 2t - \frac{1}{2} \cdot \int 1 \cdot \cos 2t\, dt = -\frac{t}{2} \cdot \cos 2t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C$$

d) $u(t) = t,\ u'(t) = 1;\ \ v'(t) = \cos(t/5);\ \ v = \int \cos(t/5)dt = 5 \cdot \sin(t/5);$

$$\int t \cdot \cos\frac{t}{5}\, dt = t \cdot 5\sin\frac{t}{5} - \int 1 \cdot 5\sin\frac{t}{5}\, dt = 5t \cdot \sin\frac{t}{5} + 25 \cdot \cos\frac{t}{5} + C$$

6.43 a) $u = x,\ u' = 1;\ v' = e^x,\ v = e^x;\ \int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x-1) \cdot e^x + C$

b) $u = x,\ u' = 1;\ v' = 2^x,\ v = 2^x/\ln 2;\ \int_0^2 x \cdot 2^x\, dx = \left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot \frac{2^x}{\ln 2}\, dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \cdot \left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)\right]_0^2 = 5{,}297$

c) $u = x,\ u' = 1;\ v' = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ v = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Big/ \ln\frac{1}{2},$

$$\int x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = x \cdot \frac{-2^{-x}}{\ln 2} - \cdot \int 1 \cdot \frac{-2^{-x}}{\ln 2} dx = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + C = -\frac{1}{2^x \cdot \ln 2} \cdot \left(x + \frac{1}{\ln 2}\right) + C$$

d) $u(t) = t,\ u' = 1;\ v'(t) = e^{-s \cdot t},\ v = -e^{-s \cdot t}/s\ ;\ \ \ldots. = t \cdot \frac{-e^{-s \cdot t}}{s} - \int 1 \cdot \left(-\frac{e^{-s \cdot t}}{s}\right) dt = -\frac{t \cdot e^{-s \cdot t}}{s} - \frac{e^{-s \cdot t}}{s^2} + C$

6.44 a) $u = 3 - x;\ u' = -1;\ v' = e^{-2x},\ v = -\frac{e^{-2x}}{2};$

$$\int_{-1}^{1} (3-x) \cdot e^{-2x}\, dx = \left[(3-x) \cdot \frac{-e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (-1) \cdot \frac{-e^{-2x}}{2} dx = \left[-\frac{(3-x) \cdot e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\right]_{-1}^{1} = 12{,}83$$

b) $u = 5 - x/2,\ u' = -1/2;\ v' = e^{x/2},\ v = 2 \cdot e^{x/2};$

$$\int_0^2 \left(5 - \frac{x}{2}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}}\, dx = \left[\left(5 - \frac{x}{2}\right) \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\, dx = \left[(12 - x) \cdot e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2 = 15{,}18$$

c) $u(t) = 3t + 1,\ u'(t) = 3;\ v'(t) = e^{t+1},\ v = e^{t+1};$

$$\int (3t+1)e^{t+1}\, dt \cdot = (3t+1) \cdot e^{t+1} - \int 3 \cdot e^{t+1}\, dt = (3t+1) \cdot e^{t+1} - 3 \cdot e^{t+1} + C = (3t-2) \cdot e^{t+1} + C$$

d) $u(t) = t+2,\ u(t) = 1;\ v'(t) = e^{-2 \cdot (t+1)},\ \ v(t) = -\frac{e^{-2 \cdot (u+1)}}{2};$

$$\int_{-1}^{1} (t+2) \cdot e^{-2 \cdot (t+1)}\, dt = \left[(t+2) \cdot \frac{-e^{-2 \cdot (t+1)}}{2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{-e^{-2 \cdot (t+1)}}{2} dt = \left[-\frac{e^{-2 \cdot (t+1)}}{4} \cdot (2t+5)\right]_{-1}^{1} = 0{,}718$$

6.45 a) $u(t) = e^{2t},\ u'(t) = 2 \cdot e^{2t};\ \ v'(t) = \sin t,\ v'(t) = -\cos t;\ \ \int e^{2t} \cdot \sin t\, dt = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot \int e^{2t} \cdot \cos t\, dt;$

nochmalige partielle Integration: $u(t) = e^{2t},\ u'(t) = 2 \cdot e^{2t};\ \ v'(t) = \cos t,\ v'(t) = \sin t;$

$$I = \int e^{2t} \cdot \sin t\, dt = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot \int e^{2t} \cdot \cos t\, dt = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot \left(e^{2t} \cdot \sin t - 2 \cdot \int e^{2t} \cdot \sin t\ dt\right) =$$

$$= -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin t - 4 \cdot \int e^{2t} \cdot \sin t\ dt = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin t - I;\ \text{d.h.:}$$

$$I = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin t - 4 \cdot I\, dt \Rightarrow 5 \cdot I = -e^{2t} \cdot \cos t + 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin t \ \text{ oder}$$

$$I = \int e^{2t} \cdot \sin t\ dt = \frac{1}{5} \cdot e^{2t} \cdot (2 \cdot \sin t - \cos t) + C$$

6.45 b) Zweimalige partielle Integration: $I = \int \underbrace{e^{-4x}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(4x)}_{v'} dx = -\frac{1}{4} e^{-4x} \cdot \cos(4x) - \int \underbrace{e^{-4x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos(4x)}_{v'} dx =$

$= -\frac{1}{4} e^{-4x} \cdot \cos(4x) - \left(\frac{1}{4} e^{-4x} \cdot \sin(4x) + \int e^{-4x} \cdot \sin(4x) dx\right) = -\frac{1}{4} e^{-4x}[\sin(4x) + \cos(4x)] - I$; d.h.

$2 \cdot I = \frac{1}{4} e^{-4x}[\sin(4x) + \cos(4x)]$ oder $I = \int e^{-4x} \cdot \sin(4x) dx = -\frac{e^{-4x}}{8} e^{-4x}[\sin(4x) + \cos(4x)] + C$

c) Zweimalige partielle Integration: $I = \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx = e^{-x} \cdot \sin x + \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx =$

$= e^{-x} \cdot \sin x + \left(-e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot \cos x\, dx\right) = e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cdot \cos x - I$;

d.h. $\cdot I = e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cdot \cos x \ - I \Rightarrow I = \frac{e^{-x}}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + C$

d) Zweimalige partielle Integration: $I = \int \underbrace{2^{-t}}_{u} \cdot \underbrace{\cos 3t}_{v'} dt = \frac{2^{-t}}{3} \cdot \sin 3t + \frac{\ln 2}{3} \cdot \int \underbrace{2^{-t}}_{u} \cdot \underbrace{\sin 3t}_{v'} dt =$

$= \frac{2^{-t}}{3} \cdot \sin 3t + \frac{\ln 2}{3} \cdot \left(-\frac{2^{-t}}{3} \cdot \cos 3t - \frac{\ln 2}{3} \cdot \int 2^{-t} \cdot \cos 3t\, dt\right) =$

$= \frac{2^{-t}}{3} \cdot \sin 3t - \frac{2^{-t} \cdot \ln 2}{9} \cdot \cos 3t - \frac{(\ln 2)^2}{9} \cdot I$; d.h. $I = \frac{2^{-t}}{3} \cdot \sin 3t - \frac{2^{-t} \cdot \ln 2}{9} \cdot \cos 3t - \frac{(\ln 2)^2}{9} \cdot I \Rightarrow$

$I = \frac{2^{-t}}{9 + (\ln 2)^2} \cdot (3 \cdot \sin 3t - \ln 2 \cdot \cos 3t) + C$

6.46 a) $u = \ln x$, $u' = 1/x$; $v' = x$, $v = x^2/2$; $\int x \cdot \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$

$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2 \ln x - 1) + C$; $\int_1^3 x \cdot \ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{4} \cdot (2 \ln x - 1)\right]_1^3 = 2{,}94$

b) $u = \ln\sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln x$, $u' = \frac{1}{2x}$; $v' = x^2$, $v = \frac{x^3}{3}$;

$\int x^2 \cdot \ln\sqrt{x}\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln\sqrt{x} - \int \frac{1}{2x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln x - \frac{x^3}{18} + C = \frac{x^3}{18} \cdot (3 \cdot \ln x - 1) + C$

c) $u = \lg x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$, $u' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$; $v' = x^3$, $v = \frac{x^4}{4}$;

$\int x^3 \cdot \lg x\, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \lg x - \int \frac{1}{x \cdot \ln 10} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\ln x}{\ln 10} - \frac{x^4}{16 \cdot \ln 10} + C = \frac{x^4}{16 \cdot \ln 10} \cdot (4 \cdot \ln x - 1) + C$

d) $u = x$; $u' = 1$; $v' = 1/\cos^2 x$, $v = \tan x$;

$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x\, dx$; $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos} dx = -\ln|\cos x| + \overline{C}$ (Typ: Zähler ist bis auf den Faktor –1 die Ableitung des Nenners, Substitutionsmethode: $u(x) = \cos x$ usw.);

$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \tan x - (-\ln|\cos x|) + C = x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + C$

6.47 a) Zweimalige partielle Integration: $\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot \int x \cdot \sin x\, dx$;

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + \overline{C}$;

damit: $\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot (-x \cdot \cos x + \sin x) + C = (x^2 - 2) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + C$

6.47 b) Zweimalige partielle Integr.: $\int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int x \cdot e^x \, dx$; $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx =$

$= x \cdot e^x - e^x + \overline{C}$; damit: $\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \left(x \cdot e^x - e^x\right) + C = \frac{e^x}{2} \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$

c) Zweimalige partielle Integr.: $\int \underbrace{\left(\frac{x}{b}\right)^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin(a\,x)}_{v'} dx = -\left(\frac{x}{b}\right)^2 \frac{1}{a} \cdot \cos(a\,x) + \frac{2}{a \cdot b^2} \cdot \int x \cdot \cos(a\,x) \, dx$;

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(a\,x)}_{v'} dx = \frac{1}{a} \cdot x \cdot \sin(a\,x) - \frac{1}{a} \cdot \int \sin(a\,x) \, dx = \frac{1}{a} \cdot x \cdot \sin(a\,x) + \frac{1}{a^2} \cdot \cos(a\,x) + \overline{C}$; damit:

$$\int \left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \sin(a\,x) \, dx = -\left(\frac{x}{b}\right)^2 \frac{1}{a} \cdot \cos(a\,x) + \frac{2}{a \cdot b^2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot x \cdot \sin(a\,x) + \frac{1}{a^2} \cdot \cos(a\,x)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{a^3 \cdot b^2} \cdot \left(-a^2 \cdot x^2 \cdot \cos(a\,x) + 2a\,x \cdot \sin(a\,x) + 2 \cdot \cos(a\,x)\right) + C$$

d) Zweimalige partielle Integration: $\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{2^{-x}}_{v'} dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot x^2 + \frac{2}{\ln 2} \cdot \int x \cdot 2^{-x} \, dx$;

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{2^{-x}}_{v'} dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot x + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} \, dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot x - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + \overline{C}$; damit:

$$\int x^2 \cdot 2^{-x} \, dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot x^2 + \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot x - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}\right) + C = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot \left(x^2 + \frac{2}{\ln 2} \cdot x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right) + C;$$

$$\int_1^2 x^2 \cdot 2^{-x} \, dx = \left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2} \cdot \left(x^2 + \frac{2}{\ln 2} \cdot x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right)\right]_1^2 = 0{,}780$$

6.48 a) Zweimalige partielle Integration: $\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'} dx = -\frac{x^2}{3} \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'} dx =$

$$= -\frac{x^2}{3} \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{x}{3} \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \int e^{-3x} \, dx\right) = -\frac{e^{-3x}}{27} \cdot \left(9x^2 + 6x + 2\right) + C;$$

$$\int_0^4 x^2 \cdot e^{-x} \, dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{27} \cdot \left(9x^2 + 6x + 2\right)\right]_0^4 = 0{,}0740$$

b) Zweimalige partielle Integration: $\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx =$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left(x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx\right) = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + \overline{C};$$

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 \cdot \cos x \, dx = \left[-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x\right]_{-\pi/2}^{0} = 2 - \pi = -1{,}142$$

c) Zweimalige partielle Integration: $\int \underbrace{t^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos\frac{t}{2}}_{v'} dt = 2t^2 \cdot \sin\frac{t}{2} - 4 \cdot \int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{v'} dt =$

$$= 2t^2 \cdot \sin\frac{t}{2} - 4 \cdot \left(-2t \cdot \cos\frac{t}{2} + 2 \cdot \int \cos\frac{t}{2} \, dt\right) = 2t^2 \cdot \sin\frac{t}{2} + 8 \cdot t \cdot \cos\frac{t}{2} - 16 \cdot \sin\frac{t}{2};$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \cdot \cos\frac{t}{2} \, dt = \left[2t^2 \cdot \sin\frac{t}{2} + 8 \cdot t \cdot \cos\frac{t}{2} - 16 \cdot \sin\frac{t}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = 2{,}678$$

6.48 d) Zweimalige part. Integr.: $\int \underbrace{\frac{x^2}{3}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(2x+\pi/3)}_{v'} dx = -\frac{x^2}{6} \cdot \cos(2x+\pi/3) + \frac{1}{3} \cdot \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(2x+\pi/3)}_{v'} dx =$

$$= -\frac{x^2}{6} \cdot \cos(2x+\pi/3) + \frac{x}{6} \cdot \sin(2x+\pi/3) - \frac{1}{6} \cdot \int \sin(2x+\pi/3)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot \cos(2x+\pi/3) + \frac{1}{6} \cdot x \cdot \sin(2x+\pi/3) + \frac{1}{12} \cdot \cos(2x+\pi/3) + C;$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x^2}{3} \cdot \sin(2x+\pi/3)\, dx = \frac{1}{12} \cdot \left[\left(1-2x^2\right) \cdot \cos(2x+\pi/3) + 2x \cdot \sin(2x+\pi/3) \right]_0^{\pi} = -0{,}369$$

6.49 a) $I = \int \cos^2 x\, dx = \int \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1-\cos^2 x)\, dx =$

$= \sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + x - I$; d.h. $I = \sin x \cdot \cos x + x - I \Rightarrow$

$2 \cdot I = \sin x \cdot \cos x + x$ oder $I = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x) + C$.

Andere Lösungsvariante: $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2x)]$, $\int \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2x)]dx = \ldots$

b) $I = \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = \int \underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{v'} dt = -2\sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + \int \cos^2 \frac{t}{2} dt = -2\sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + \int \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt =$

$= -2 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + \int 1\, dt - \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = -2 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + \int 1\, dt - I$; d.h.

$2 \cdot I = -2 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + t$ oder $I = \frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}$;

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 0{,}285.$$

Andere Lösungsvariante: $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2x)]$, $\int \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2x)]dx = \ldots$

c) Güstigerweise zuerst Rückführung auf $\int \sin^2 x\, dx$ durch Substitution $x = \omega \cdot t + \varphi$;

$\frac{dx}{dt} = \omega \Rightarrow dt = \frac{1}{\omega} \cdot dx$: $\int \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) dt = \frac{1}{\omega} \cdot \int \sin^2 x\, dx$;

$I = \int \sin^2 x\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx =$

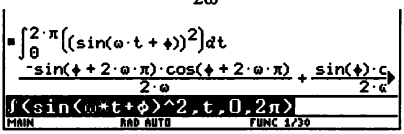
$= -\sin x \cdot \cos x + \int 1\, dx - \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - I$; d.h. $I = -\sin x \cdot \cos x + x - I \Rightarrow$

$I = \int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot (x - \sin x \cdot \cos x) + C$;

t–Grenzen in x–Grenzen umrechnen: $t = 0 \Rightarrow x = \omega \cdot 0 + \varphi = \varphi$; $t = \pi$: $x = \omega \cdot \pi + \varphi$;

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) dt = \frac{1}{\omega} \cdot \int_{\varphi}^{\omega\cdot\pi+\varphi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2} \cdot [x - \sin x \cdot \cos x]_{\varphi}^{\omega\cdot\pi+\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\omega} \cdot [\omega \cdot \pi - \sin(\omega \cdot \pi + \varphi) \cdot \cos(\omega \cdot \pi + \varphi) + \sin\varphi \cdot \cos\varphi]$$



6.49 d) $\sin(t+1) = \sin t\cdot \cos 1 + \cos t\cdot\sin 1 = 0{,}5403\cdot\sin t + 0{,}8415\cdot\cos t$;

$\int \sin t\cdot(0{,}5403\cdot\sin t + 0{,}8451\cdot\cos t)\,dt = 0{,}5403\cdot\int\sin^2 t\,dt + 0{,}8451\cdot\int\sin t\cdot\cos t\,dt$;

$\int\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(t-\sin t\cdot\cos t)+C_1$ ... siehe c); $\int\sin t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t + C_2$ ... siehe 6.36 c);

$0{,}5403\cdot\int\sin^2 t\,dt + 0{,}8451\cdot\int\sin t\cdot\cos t\,dt = 0{,}5403\cdot\frac{1}{2}\cdot(t-\sin t\cdot\cos t)+0{,}8451\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin^2 t\ + C$;

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cdot\sin(t+1)\,dt = \left[0{,}5403\cdot\frac{1}{2}\cdot(t-\sin t\cdot\cos t)+0{,}8451\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 1{,}697$$

6.50 a) $\int\arctan x\,dx = \int\underbrace{\arctan x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx = x\cdot\arctan x - \int\frac{x}{x^2+1}dx$. Das verbleibende Integral ist vom Typ: Zähler ist (bis auf den Faktor 2) die Ableitung des Nenners; daher Substitution: $u = x^2 + 1$ usw.

Ergebnis: $\int\arctan x\,dx = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right| + C = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)+C$

b) $\int\arcsin x\,dx = \int\underbrace{\arcsin x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx = x\cdot\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Das verbleibende Integral ist vom Typ: Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung; daher Substitution: $u = 1 - x^2$ usw.

Ergebnis: $\int\arcsin x\,dx = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$

c) $\ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$;

$\int\ln\frac{1}{x}dx = -\int\ln x\,dx = -\int\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx = -x\cdot\ln x + \int dx = -x\cdot\ln x + x + C = x\cdot(1-\ln x)+C$

d) $\ln\sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\ln x$; $\int\ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\ln x - \frac{1}{2}\cdot\int dx = \frac{x}{2}\cdot(\ln x - 1)+C$

$$\int_1^4\ln\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{x}{2}\cdot(\ln x - 1)\right]_1^4 = 1{,}273$$

6.51 a) $x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$;

$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\quad |\cdot((x-1)\cdot(x+1)$

$5x-1 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-1)$

$x = 1: 4 = 2\cdot A \Rightarrow A = 2$;

$x = -1: -6 = B\cdot(-2) \Rightarrow B = 3$;

$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$

b) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

$\frac{4x-5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\quad |\ (x+1)\cdot(x-2)$

$4x - 5 = A\cdot(x-2) + B\cdot(x+1)$

$x = 2:\quad 3 = B\cdot 3 \Rightarrow B = 1$

$x = -1: -9 = A\cdot(-3) \Rightarrow A = 3$

$\frac{4x-5}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-2}$

c) $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$

$\frac{-x+8}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\quad |\ (x+2)\cdot(x-3)$

$-x + 8 = A\cdot(x-3) + B\cdot(x+2)$

$-x + 8 = A\cdot x - 3A\ + B\cdot x + 2B$

$-x + 8 = (A+B)\cdot x - 3A + 2B$

Koeffizientenvergleich:

I: $A\ + B = -1$

$\underline{\text{II: } -3A + 2B = 8}\quad \Rightarrow A = -2, B = 1$

$\frac{-x+8}{x^2-x-2} = -\frac{2}{x+2}+\frac{B}{x-3}$

d) $2x^2 + 5x - 12 = 2\cdot(x^2 + 5x/2 - 6)$;

$x^2 + 5x/2 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3/2$

$\frac{3x-10}{x^2+5x/2-6} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-3/2}\quad |\ (x+4)\cdot(x-3/2)$

$3x - 10 = \cdot A\cdot(x - 3/2) + B\cdot(x + 4)$

$x = 3/2: -11/2 = B\cdot 11/2 \Rightarrow B = -1$

$x = -4: -22 = A\cdot(-11/2) \Rightarrow A = 4$

$\frac{3x-10}{x^2+5x/2-6} = \frac{4}{x+4}-\frac{1}{x-3/2} = \frac{4}{x+4}-\frac{2}{2x-3}$;

$\frac{3x-10}{2x^2+5x-12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x-10}{x^2+5x/2-6} = \frac{2}{x+4}-\frac{1}{2x-3}$

6.52 a) $x^3 + 3x^2 + 2x = x\cdot(x^2 + 3x + 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = -1$

$\frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1} \,|\cdot(x^3 + 3x^2 + 2x)$

$3x^2 + 6x + 2 = A\cdot(x+2)\cdot(x+1) + B\cdot x\cdot(x+1) + C\cdot x\cdot(x+2)$

$x = 0$: $2 = 2\cdot A \Rightarrow A = 1$; $x = -2$: $2 = 2B \Rightarrow B = 1$; $x = -1$: $-1 = -C \Rightarrow C = 1$

$\frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x = x\cdot(x^2 + 5x + 6) = 0$; $x_1 = 0$; $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3, x_3 = -2$

$\frac{x^2+6x+12}{x^3+5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+2} \,|\cdot(x^3 + 5x^2 + 6x)$

$x^2 + 6x + 12 = A\cdot(x+3)\cdot(x+2) + B\cdot x\cdot(x+2) + C\cdot x\cdot(x+3)$

Einsetzen: $x = 0$, $x = -3$ sowie $x = -2 \Rightarrow A = 2; B = 1; C = -2$; $\frac{x^2+6x+12}{x^3+5x^2+6x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+2}$

c) $x^3 + 3x^2 = x^2\cdot(x + 3) = 0$; $x_1 = 0$ (zweifache Nullstelle); $x_2 = -3$

$\frac{x^2+4x-6}{x^3+3x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} \,|\cdot(x^3 + 3x^2)$

$x^2 + 4x - 6 = A\cdot x\cdot(x+3) + B\cdot(x+3) + C\cdot x^2$; Einsetzen: $x = 0$, $x = -3$ sowie etwa $x = 1$:

$x = 0$: $-6 = 3\cdot B \Rightarrow B = -2$; $x = -3$: $-9 = 9\cdot C \Rightarrow C = -1$; $x = 1$: $-1 = 4A + 4B + C \Rightarrow A = 2$;

$\frac{x^2+4x-6}{x^3+3x^2} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x+3}$

d) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$; $x_1 = -1$ kann als Nullstelle erraten werden;

$(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x + 1) = x^2 + 5x + 6$; $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3; x_3 = -2$

$\frac{x^2-8x-11}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+2} \,|\cdot(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

$x^2 - 8x - 11 = A\cdot(x+3)\cdot(x+2) + B\cdot(x+1)\cdot(x+2) + C\cdot(x+1)\cdot(x+3)$

Einsetzen: $x = -1$, $x = -3$, $x = -2 \Rightarrow A = -1, B = 11, C = -9$;

$\frac{x^2-8x-11}{x^3+6x^2+11x+6} = -\frac{1}{x+1} + \frac{11}{x+3} - \frac{9}{x+2}$

6.53 a) $x^3 + 4x^2 + 4x = x\cdot(x^2 + 4x + 4) = 0$; $x_1 = 0$; $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$ (zweifache Nullstelle)

$\frac{3x^2+8x+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \,|\cdot(x^3 + 4x^2 + 4x)$

$3x^2 + 8x + 8 = A\cdot(x+2)^2 + B\cdot x\cdot(x+2) + C\cdot x$

Einsetzen: $x = 0$, $x = -2$ und etwa $x = 1 \Rightarrow A = 2; B = 1; C = -2$

$\frac{3x^2+8x+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$

b) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 = x^2\cdot(x^2 + 5x + 6) = 0$; $x_1 = 0$ (zweifache Nullstelle);

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3; x_3 = -2$

$\frac{-2x^3+10x+12}{x^4+5x^3+6x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x+2} \,|\cdot(x^4 + 5x^3 + 6x^2)$

$-2x^3 + 10x + 12 = A\cdot x\cdot(x+3)\cdot(x+2) + B\cdot(x+2)\cdot(x+3) + C\cdot x^2\cdot(x+3) + D\cdot x^2\cdot(x+2)$

Einstzen: $x = 0$, $x = -3$, $x = -2$ sowie etwa $x = 1 \Rightarrow A = 0, B = 2, C = -4; D = 2$

$\frac{-2x^3+10x+12}{x^4+5x^3+6x^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x+3} + \frac{2}{x+2}$

6.53 c) $x^4-2x^2+1=0$; Substitution: $u=x^2$; $u^2-2u+1=0 \Rightarrow u_1=1$ (zweifache Nullstelle);
$x^2=1 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$ (jeweils zweifache Nullstellen)

$$\frac{x^3-7x-2}{x^4-2x^2+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2} \quad |\cdot(x^4-2x^2+1)$$

$x^3-7x-2=A\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2+B\cdot(x-1)^2+C\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)+D\cdot(x+1)^2$
Einstzen: $x=-1$, $x=1$ sowie etwa $x=0$ und $x=2 \Rightarrow A=0,\ B=1,\ C=1;\ D=-2$

$$\frac{x^3-7x-2}{x^4-2x^2+1}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}$$

d) $x_1=-2$, $x_2=2$ (dreifache Nullstelle)

$$\frac{4x^3-50x+60}{(x+2)\cdot(x-2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3} \quad |\cdot(x+2)\cdot(x-2)^3$$

$4x^3-50x+60=A\cdot(x-2)^3+B\cdot(x+2)\cdot(x-2)^2+C\cdot(x+2)\cdot(x-2)+D\cdot(x+2)$
Einstzen: $x=-2$, $x=2$ sowie etwa $x=0$ und $x=1 \Rightarrow A=-2,\ B=6,\ C=0;\ D=-2$

$$\frac{4x^3-50x+60}{(x+2)\cdot(x-2)^3}=-\frac{2}{x+2}+\frac{6}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^3}$$

6.54 a) $x^3-2x^2+2x=x\cdot(x^2-2x+2)=0$; $x_1=0$; $x^2-2x+2=0 \Rightarrow x_2=1+j,\ x_3=1-j$, d.h. komplexe Nullstellen; $\dfrac{2x^2-x+2}{x^3-2x^2+2x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B\cdot x+C}{x^2-2x+2} \quad |\cdot(x^3-2x^2+2x)$

$2x^2-x+2=A\cdot(x^2-2x+2)+(B\cdot x+C)\cdot x$;
Koeffizientenvergleich: $2x^2-x+2=(A+B)\cdot x^2+(C-2A)\cdot x+2A$

I: $A+B=2$
II: $C-2A=-1$
III: $\underline{\quad 2A=2}$ $\Rightarrow A=1;\ B=1;\ C=1$

$$\frac{2x^2-x+2}{x^3-2x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2-2x+2}$$

b) $x^3-x^2+3x+5=0$; $x_1=-1$ kann als Nullstelle erraten werden;
$(x^3-x^2+3x+5):(x+1)=x^2-2x+5=0 \Rightarrow x_2=1+2j;\ x_3=1-2j$, d.h. komplexe Nullst.

$$\frac{6x^2+3x+13}{x^3-x^2+3x+5}=\frac{A}{x+1}+\frac{B\cdot x+C}{x^2-2x+5} \quad |\cdot(x^3-x^2+3x+5)$$

$6x^2+3x+13=A\cdot(x^2-2x+5)+(B\cdot x+C)\cdot(x+1)$; Koeffizientenvergleich:
$6x^2+3x+13=(A+B)\cdot x^2+(-2A+B+C)\cdot x+5A+C \Rightarrow A=2,\ B=4,\ C=3$;

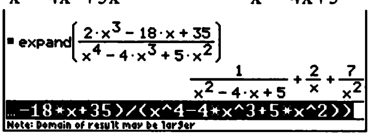
$$\frac{6x^2+3x+13}{x^3-x^2+3x+5}=\frac{2}{x+1}+\frac{4\cdot x+3}{x^2-2x+5}$$

c) $x^4-4x^3+5x^2=x^2\cdot(x^2-4x+5)=0$; $x_1=0$ (zweifache Nullstelle);
$x^2-4x+5=0 \Rightarrow x_2=2+j;\ x_3=2-j$, d.h. komplexe Nullst.

$$\frac{2x^3-18x+35}{x^4-4x^3+5x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C\cdot x+D}{x^2-4x+5} \quad |\cdot(x^4-4x^3+5x^2)$$

$2x^3-18x+35=A\cdot x\cdot(x^2-4x+5)+B\cdot(x^2-4x+5)+(C\cdot x+D)\cdot x^2$; Koeffizientenvergleich:
$2x^3-18x+35=(A+C)\cdot x^3+(-4A+B+D)\cdot x^2+(5A-4B)\cdot x+5B \Rightarrow A=2,\ B=7,\ C=0;\ D=1$;

$$\frac{2x^3-18x+35}{x^4-4x^3+5x^2}=\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^2-4x+5}$$



Mathcad:
An irgendeiner Stelle die Variable x im Bruch durch Anklicken markieren, dann Menü *Symbolik/Variable/Partialbruchentwicklung*

$$\frac{2x^3-18x+35}{x^4-4x^3+5x^2}$$

$$\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2-4\cdot x+5}$$

6.54 d) $x^4 + x^3 - 2x = x\cdot(x^3 + x^2 - 2) = 0$; $x_1 = 0$; $\cdot(x^3 + x^2 - 2) = 0$, $x_2 = 1$ kann als Nullstelle erraten werden; $(x^3 + x^2 - 2) : (x - 1) = x^2 + 2x + 2$; $x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1+j$; $x_3 = -1-j$, d.h. komplexe Nullst.;

$$\frac{x^2-2x-4}{x^4+x^3-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C\cdot x+D}{x^2+2x+2} \quad |\cdot(x^4 + x^3 - 2x)$$

$x^2 - 2x - 4 = A\cdot(x-1)\cdot(x^2 + 2x + 2) + B\cdot x\cdot(x^2 + 2x + 2) + (C\cdot x + D)\cdot x\cdot(x-1)$;

Koeffizientenvergleich:

$x^2 - 2x - 4 = (A+B+C)\cdot x^3 + (A+2B-C+D)\cdot x^2 + (2B-D)\cdot x - 2A \Rightarrow A = 2, B = -1, C = -1, D = 0$

$$\frac{x^2-2x-4}{x^4+x^3-2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+2x+2}$$

In den Aufgaben 6.55 bis 6.60 wird die Partialbruchzerlegung nicht mehr gezeigt.

6.55 a) $\frac{x+12}{x^2-x-6} = -\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$; $\int\frac{x+12}{x^2-x-6}dx = -2\cdot\int\frac{dx}{x+2} + 3\cdot\int\frac{dx}{x-3} = -2\cdot\ln|x+2| + 3\cdot\ln|x-3| + C$

b) $\frac{7x-2}{2x^2+x-1} = \frac{1}{2x-1} + \frac{3}{x+1}$; $\int\frac{7x-2}{2x^2+x-1}dx = \int\frac{dx}{2x-1} + 3\cdot\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\cdot\ln|2x-1| + 3\cdot\ln|x+1| + C$

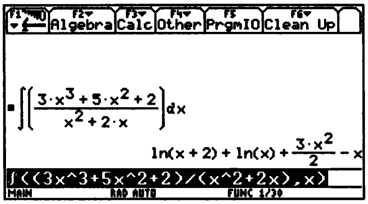
c) $\frac{3x^2-2x+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1}$; $\int\ldots dx = -\int\frac{dx}{x} + 3\cdot\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + 3\cdot\ln|x+1| + \ln|x-1| + C$

6.56 a) $\frac{4x^2-7x+2}{x^3-2x^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-2}$; $\int\frac{4x^2-7x+2}{x^3-2x^2}dx = 3\cdot\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} + 2\cdot\int\frac{dx}{x-2} = 3\cdot\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C$

b) $\frac{4x^2-16x+15}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$; $\int\frac{4x^2-16x+15}{x^3-5x^2+8x-4}dx = 3\cdot\ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$

c) $\frac{3x^2-9x+2}{(x-2)^2\cdot(x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x+2}$; $\int\frac{3x^2-9x+2}{(x-2)^2\cdot(x+2)}dx = \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + 2\cdot\ln|x+2| + C$

6.57 a) $\frac{3x^3+5x^2+2}{x^2+2x} = 3x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$; $\int\frac{3x^3+5x^2+2}{x^2+2x}dx = \frac{3}{2}\cdot x^2 - x + \ln|x| + \ln|x+2| + C$



Mathcad:

$$\int\frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2 + 2x}dx = \frac{3}{2}\cdot x^2 - x + \ln(x) + \ln(x+2) + C$$

Das Gleichheitszeichen und die Konstante wurden als Text hinzugefügt.

b) $\frac{4x^3-13x+15}{x^2-x-2} = 4x + 4 - \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$; $\int\frac{4x^3-13x+15}{x^2-x-2}dx = 2x^2 + 4x - 3\cdot\ln|x-2| + 2\cdot\ln|x+1| + C$

c) $\frac{x^4-x^3+x-4}{x^3+x^2-2x} = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$; $\int\frac{x^4-x^3+x-4}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\cdot\ln|x| - \ln|x-1| + 3\cdot\ln|x+2| + C$

6.58 a) $\frac{x^4+2x^3+x-4}{x^3-x^2-2x} = x + 3 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-2}$; $\int\ldots dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 2\cdot\ln|x| - 2\cdot\ln|x+1| + 5\cdot\ln|x-2| + C$

b) $\frac{2x^3-4x^2-4}{x^3-2x^2} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-2}$; $\int\frac{2x^3-4x^2-4}{x^3-2x^2}dx = 2x + \ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x-2| + C$

c) $\frac{x^4-8x^3+66x-74}{(x-2)^2\cdot(x+3)} = x - 7 + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x-2)^2}$; $\int\ldots dx = \frac{x^2}{2} - 7x + \ln|x+3| - \frac{2}{x-2} + C$

6.59 a) $\frac{4x^2+6x-9}{4x^3+9x}=-\frac{1}{x}+\frac{8x+6}{4x^2+9}$; $\int\frac{8x+6}{4x^2+9}dx=\int\frac{8x}{4x^2+9}dx+\int\frac{6}{4x^2+9}dx$;

$u=4x^2+9$; $\frac{du}{dx}=8x \Rightarrow dx=\frac{1}{8x}du$; $\int\frac{8x}{4x^2+9}dx=\int\frac{8x}{u}\cdot\frac{1}{8x}du=\ln|u|=\ln(4x^2+9)$;

$\int\frac{6}{4x^2+9}dx=\int\frac{6}{9\cdot\left[1+(2x/3)^2\right]}dx$; $u=\frac{2x}{3} \Rightarrow dx=\frac{3}{2}du$;

$\int\frac{6}{9\cdot\left[1+(2x/3)^2\right]}dx=\int\frac{6}{9\cdot\left[1+u^2\right]}\cdot\frac{3}{2}du=\arctan u=\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)$;

$\int\frac{4x^2+6x-9}{4x^3+9x}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{8x+6}{4x^2+9}dx=-\ln|x|+\ln(4x^2+9)+\arctan\frac{2x}{3}+C$

b) $\int\frac{12x^2+6x+4}{3x^3+2x}dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{6x+6}{3x^2+2}dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{6x}{3x^2+2}dx+\int\frac{6}{3x^2+2}dx=$

$=2\cdot\ln|x|+\ln\left(3x^2+2\right)+\sqrt{6}\cdot\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$

c) $\int\frac{-2x-1}{2x^4+x^2}dx=-6\cdot\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{12x+2}{2x^2+1}dx=-6\cdot\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+3\cdot\int\frac{4x}{2x^2+1}dx+\int\frac{2}{2x^2+1}dx=$

$=-2\cdot\ln|x|+\frac{1}{x}+3\cdot\ln\left(2x^2+1\right)+\sqrt{2}\cdot\arctan\left(x\cdot\sqrt{2}\right)+C$

6.60 a) $\int\frac{8x^2+26}{x^3-6x^2+13x}dx=2\cdot\int\frac{dx}{x}+\int\frac{6x+12}{x^2-6x+13}dx=2\cdot\int\frac{dx}{x}+3\cdot\int\frac{2x}{x^2-6x+13}dx+\int\frac{12}{x^2-6x+13}dx=$

$=2\cdot\ln|x|+3\cdot\ln\left(x^2-6x+13\right)+15\cdot\arctan\frac{x-3}{2}+C$

b) $\int\frac{2x^3-2x^2-16x+32}{x^4-4x^3+8x^2}dx=4\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{2x-6}{x^2-4x+8}dx=4\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{2x}{x^2-4x+8}dx-\int\frac{6}{x^2-4x+8}dx=$

$=-\frac{4}{x}+\ln\left(x^2-4x+8\right)-\arctan\frac{x-2}{2}+C$

c) $\int\frac{4x^3+49x-55}{(x+2)^2\cdot(x^2-8x+17)}dx=\int\frac{dx}{x+2}-5\cdot\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\int\frac{3x-1}{x^2-8x+17}dx=$

$=\int\frac{dx}{x+2}-5\cdot\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\frac{3}{2}\int\frac{2}{x^2-8x+17}dx-\int\frac{1}{x^2-8x+17}dx=$

$=\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2}\cdot\ln\left(x^2-8x+17\right)+11\cdot\arctan(x-4)+C$

6.61 a) $u=\cos x,\ dx=-\frac{1}{\sin x}du$; $\int\ldots dx=\frac{1}{3}\cdot\int u^4\cdot\sin x\cdot\frac{-1}{\sin x}dx=-\frac{1}{3}\cdot\int u^4du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{u^5}{5}=-\frac{1}{15}\cdot\cos^5 x+C$

b) Zweimalige partielle Integration analog wie Aufgabe 6.45 b):

$\int_{-1}^{0}3\cdot e^{-4x}\cdot\cos(2x)\,dx=\frac{3}{10}\cdot\left[e^{-4x}\cdot(\sin(2x)-2\cdot\cos(2x))\right]_{-1}^{0}=0{,}661$

c) $\int_{1}^{2}\frac{2x+4}{x^2+4}dx=\int\frac{2x\cdot dx}{x^2+4}+4\cdot\int\frac{dx}{x^2+4}=\left[\ln\left(x^2+4\right)+2\cdot\arctan\frac{x}{2}\right]_1^2=1{,}114$

d) $u=-\frac{1}{3}\cdot x^3$; $dx=-\frac{1}{x^2}du$; $\int x^2e^u\cdot\frac{-1}{x^2}du=-\int e^u du=-e^u+C=-e^{-x^3/3}+C$;

$\int_{-1}^{1}x^2\cdot e^{-x^3/3}\,dx=-\left[e^{-x^3/3}\right]_{-1}^{1}=0{,}679$

6.62 a) $\int_1^2 x\cdot\sqrt{3x+1}\,dx = \left[\frac{2x}{9}\cdot(3x+1)^{3/2} - \frac{8}{189}\cdot(3x+1)^{7/4}\right]_1^2 = 3{,}560$

b) Zweimalige partielle Integration: $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx = -x^2\cdot e^{-x} + 2\cdot\int x\cdot e^{-x}\,dx =$

$= -x^2\cdot e^{-x} + 2\cdot\left[-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] = -x^2\cdot e^{-x} - 2\cdot x\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-x} = -e^{-x}\cdot\left(x^2+2x+2\right)+C$

c) $\int_{-2}^{0}\frac{e^x}{e^x+3}dx = \left[\ln\left(e^x+3\right)\right]_{-2}^{0} = 0{,}244$

d) $\int_0^2 (3\cdot\tanh x + 2)\,dx = \int_0^2\left(3\cdot\frac{\sinh x}{\cosh x}+2\right)dx = \left[3\cdot\ln(\cosh x) + 2x\right]_0^2 = 7{,}975$

6.63 a) Partielle Integration: $\int \ln x\cdot\ln x\,dx$ mit u = ln x, v' = ln x; v durch eine weitere partielle Integration: $v = \int \ln x\cdot 1\,dx = x\cdot\ln x - x$ (siehe Beispiel 6.14 d), Lehrbuch Seite 213).

$\int \ln x\cdot\ln x\,dx = \ln x\cdot(x\cdot\ln x - x) - \int(x\cdot\ln x - x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x\cdot(\ln x - 1) - \int(\ln x - 1)\,dx =$

$= x\cdot\ln x\cdot(\ln x - 1) - \int\ln x\,dx + \int 1\,dx = x\cdot\ln x\cdot(\ln x - 1) - (x\cdot\ln x - x) + x + C =$

$= x\cdot\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}} = \int\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{(x-1)-(x-2)}dx = \int\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)dx = \frac{2}{3}\cdot\left((x-1)^{3/2}+(x-2)^{3/2}\right)+C$

c) Substitution $u=\sqrt{x+1}$, $dx = 2\cdot\sqrt{x+1}\,du = 2u\,du$; $\int e^{\sqrt{x+1}}dx = 2\cdot\int e^u\cdot u\,du$, partielle Integr.

$= 2\cdot\left(u\cdot e^u - \int e^u\,du\right) = 2\cdot\left(u\cdot e^u - e^u\right) = 2\cdot e^u\cdot(u-1) = 2\cdot e^{\sqrt{x+1}}\cdot\left(\sqrt{x+1}-1\right)+C$

d) $\int 3\,x\cdot e^{x/2}dx = 6\cdot(x-2)\cdot e^{x/2} + C$

6.64 a) Genauer Wert: 18,6667

n	Mittelpunktsformel	Trapezformel
2	$1\cdot[2{,}5^2 + 3{,}5^2] = 18{,}5$	$0{,}5\cdot[2^2 + 2\cdot 3^2 + 4^2] = 19$
4	$0{,}5\cdot[2{,}25^2 + 2{,}75^2 + 3{,}25^2 + 3{,}75^2] = 18{,}625$	$0{,}25\cdot[2^2 + 2\cdot 2{,}5^2 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3{,}5^2 + 4^2] = 18{,}75$

b) Genauer Wert: 4

n	Mittelpunktsformel	Trapezformel
2	$1\cdot[0{,}5^3 + 1{,}5^3] = 3{,}5$	$0{,}5\cdot[0^3 + 2\cdot 1^3 + 2^3] = 5$
4	$0{,}5\cdot[0{,}25^3 + 0{,}75^3 + 1{,}25^3 + 1{,}75^3] = 3{,}875$	$0{,}25\cdot[0^3 + 2\cdot 0{,}5^3 + 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1{,}5^3 + 2^3] = 4{,}25$

	Genauer Wert	Mittelpunktsformel n = 2	Mittelpunktsformel n = 4	Trapezformel n = 2	Trapezformel n = 4
c)	2/3	0,6044	0,6481	0,8056	0,7050
d)	1/2	0,5131	0,5032	0,4740	0,4936
e)	π/4 = 0,7854	0,7906	0,7867	0,7750	0,7828
f)	2,0498	2,1334	2,0717	1,8780	2,0057
g)	2	1,9106	1,9689	2,2278	2,0692
h)	0,3863	0,3914	0,3876	0,3760	0,3837

6.65

	Keplerformel	Simpsonformel
a)	$\frac{1}{6}\cdot[1+4\cdot 1{,}0607+1{,}4142] = 1{,}1095$	$\frac{1}{6\cdot 2}\cdot[1+4\cdot 1{,}0078+2\cdot 1{,}067+4\cdot 1{,}1924+1{,}4142] = 1{,}1114$
b)	$\frac{4}{6}\cdot[0{,}2689+4\cdot 0{,}4268+0{,}1673] = 1{,}4291$	$\frac{4}{6\cdot 4}\cdot[f(1)+4\cdot f(1{,}5)+2\cdot f(2)+4\cdot f(2{,}5)+\ldots+f(5)] = 1{,}4473$
c)	$\frac{\pi}{6}\cdot[0+4\cdot 1+0] = 2{,}0944$	$\frac{\pi}{6\cdot 4}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}3927)+2\cdot f(0{,}7854)+\ldots+f(\pi)] = 2{,}3565$

6.65 d) $\frac{\pi/2}{6}\cdot[0{,}6366+4\cdot 0{,}3001+0]=0{,}4809$ $\quad\frac{\pi/2}{6\cdot 4}\cdot[f(\pi/2)+4\cdot f(9\pi/16)+2\cdot f(10\pi/16)+\ldots+f(\pi)]=0{,}4812$

e) $\frac{1}{6}\cdot[1{,}4427+4\cdot 1{,}0914+0{,}9102]=1{,}1197$ $\quad\frac{1}{6\cdot 6}\cdot[f(2)+4\cdot f(2{,}0833)+2\cdot f(1{,}1667)+\ldots+f(3)]=1{,}1184$

f) $\frac{\pi/2}{6}\cdot[1+4\cdot 1{,}2247+1{,}4142]=1{,}9146$ $\quad\frac{\pi/2}{6\cdot 5}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}1571)+2\cdot f(0{,}3142)+\ldots+f(\pi/2)]=1{,}9101$

g) $\frac{2}{6}\cdot[1+4\cdot 0{,}5+0{,}0588]=1{,}0196$ $\quad\frac{2}{6\cdot 4}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}25)+2\cdot f(0{,}5)+\ldots+f(2)]=1{,}0701$

h) $\frac{1}{6}\cdot[2{,}7183+4\cdot 2{,}9878+3{,}6945]=3{,}0607$ $\quad\frac{1}{6\cdot 3}\cdot[f(1)+4\cdot f(1{,}1667)+2\cdot f(1{,}3333)+\ldots+f(2)]=3{,}0591$

i) $\frac{2}{6}\cdot[1+4\cdot 0{,}3679+0{,}0183]=0{,}8299$ $\quad\frac{2}{6\cdot 4}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}25)+2\cdot f(0{,}5)+\ldots+f(2)]=0{,}8821$

6.66 (1) a) $\frac{\pi}{8}\cdot[f(0{,}1963)+f(0{,}5890)+f(0{,}9817)+f(1{,}3744)]=1{,}9101$

b) $\frac{\pi}{16}\cdot[f(0)+2\cdot f(\pi/8)+2\cdot f(\pi/4)+2\cdot f(3\pi/8)+f(1)]=1{,}9101$

c) $\frac{\pi/2}{6}\cdot[f(0)+4\cdot f(\pi/4)+f(\pi/2)]=1{,}9146$

d) $\frac{\pi/2}{6\cdot 2}\cdot[f(0)+4\cdot f(\pi/8)+2\cdot f(\pi/4)+4\cdot f(3\pi/8)+f(\pi/2)]=1{,}9101$

(2) a) $\frac{1}{4}\cdot[f(0{,}125)+f(0{,}375)+f(0{,}625)+f(0{,}875)]=0{,}7732$

b) $\frac{0{,}25}{2}\cdot[f(0)+2\cdot f(0{,}25)+2\cdot f(0{,}5)+2\cdot f(0{,}75)+f(1)]=0{,}7821$

c) $\frac{1}{6}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}5)+f(1)]=0{,}7786$

d) $\frac{1}{6\cdot 2}\cdot[f(0)+4\cdot f(0{,}25)+2\cdot f(0{,}5)+4\cdot f(0{,}75)+f(1)]=0{,}7764$

6.67 $\ln 2=0{,}693147$ (genau auf 6 Nachkommastellen); Keplerformel: $\ln 2\approx\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{1}+4\cdot\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{2}\right]=0{,}6944$;

Simpsonformel: $\ln 2\approx\frac{1}{6\cdot 6}\cdot\left[\frac{1}{1}+4\cdot\frac{1}{13/12}+2\cdot\frac{1}{14/12}+\ldots+\frac{1}{2}\right]=0{,}693149$

6.68 a) Trapezregel: $\frac{2/4}{2}\cdot[1{,}0+2\cdot 1{,}1+2\cdot 1{,}5+2\cdot 2{,}4+3{,}8]=3{,}7000$

Simpsonformel: $\frac{2}{6\cdot 2}\cdot[1{,}0+4\cdot 1{,}1+2\cdot 1{,}5+4\cdot 2{,}4+3{,}8]=3{,}6333$

b) Trapezregel: $\frac{8/4}{2}\cdot[1{,}099+2\cdot 1{,}609+2\cdot 1{,}946+2\cdot 2{,}197+2{,}398]=15{,}0010$

Simpsonformel: $\frac{8}{6\cdot 2}\cdot[1{,}099+4\cdot 1{,}609+2\cdot 1{,}946+4\cdot 2{,}197+2{,}398]=15{,}0753$

c) Trapezregel: $\frac{6/6}{2}\cdot[1+2\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}111+2\cdot 0{,}063+2\cdot 0{,}040+2\cdot 0{,}028+0{,}020]=1{,}0020$

Simpsonformel: $\frac{6}{6\cdot 3}\cdot[1+4\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}111+4\cdot 0{,}063+2\cdot 0{,}040+4\cdot 0{,}028+0{,}020]=0{,}8953$

6.69 a) $\int_3^\infty\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_3^b\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_3^b=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}\cdot\left[\frac{1}{b^2}-\frac{1}{9}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left(0-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}$

b) $\int_1^\infty\frac{2}{x^4}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{2}{x^4}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{-2}{3}\cdot\left[\frac{1}{b^3}-1\right]=-\frac{2}{3}\cdot(0-1)=\frac{2}{3}$

6.69 c) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|b|-\ln 1\right] = \infty$

d) $\int_1^\infty \frac{3}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[6\cdot\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} 6\cdot\left(\sqrt{b}-1\right) = \infty$

e) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{b^2}-2{,}8198\right] = \infty$

f) $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+0{,}3679\right] = 0+0{,}3679 = 0{,}3679$

g) $\int_0^\infty e^{-4x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{4}\cdot\left[e^{-4b}-1\right] = -\frac{1}{4}\cdot(0-1) = 0{,}25$

h) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}\cdot\left[e^{-b^2}-1\right] = -\frac{1}{2}\cdot(0-1) = 0{,}5$

i) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan b-0\right] = \frac{\pi}{2}$

j) $\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + C = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+C = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}+C$; $\int_{-\infty}^\infty \ldots dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \ldots dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \ldots dx$;

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]_a^c = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2c}-1}{e^{2c}+1}-\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\right] = \frac{e^{2c}-1}{e^{2c}+1}-\frac{0-1}{0+1} = 1+\frac{e^{2c}-1}{e^{2c}+1};$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right]_c^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1-e^{-2b}}{1+e^{-2b}}-\frac{1-e^{-2c}}{1+e^{-2c}}\right] = 1-\frac{e^{-2c}-1}{e^{-2c}+1} = 1-\frac{e^{2c}-1}{e^{2c}+1};$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh^2 x}dx = 1+\frac{e^{2c}-1}{e^{2c}-1}+1-\frac{e^{2c}-1}{e^{2c}-1} = 2$$

k) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \arctan(x+2)+C$; $\int_{-\infty}^\infty \ldots\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan(x+2)\right]_a^c + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(x+2)\right]_c^b =$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan(c+2)-\arctan(a+2)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b+2)-\arctan(c+2)\right] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = \pi$$

l) $\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[1-\cos b\right]$, Grenzwert nicht definiert, Integral existiert nicht

m) $\int_0^\infty \ldots\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}\cdot\left[e^{-x}\cdot(\sin x+\cos x)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}\cdot\left[e^{-b}\cdot(\sin b+\cos b)-1\right] = -\frac{1}{2}\cdot(0-1) = \frac{1}{2}$

n) $\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{5}\cdot e^{-2x}\cdot(\sin x-2\cos x)\right]_0^b = \frac{1}{5}\cdot\lim_{b\to\infty}\left[e^{-2b}\cdot(\sin b-2\cos b)-(-2)\right] = \frac{2}{5}$

o) $\int_1^\infty \frac{1}{x\cdot(1+x^2)}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]_1^b = \frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b^2}{1+b^2}-\ln\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot(\ln 1-(-0{,}693)) = 0{,}347$

p) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2\cdot(1+x)}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b+1}{b}-\frac{1}{b}\right]-(\ln 2-1) = 0 = \ln 1-0-(\ln 2-1) = 0{,}307$

6.70 a) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0}\frac{5}{4}\cdot\left[x^{4/5}\right]_a^2 = \lim\limits_{a\to 0}\frac{5}{4}\cdot\left[1{,}741 - a^{4/5}\right] = 2{,}176$

b) $\int\limits_0^1 \frac{2}{x^3}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 \frac{2}{x^3}dx = \lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{-1}{x^2}\right]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}\left[-1-\frac{-1}{a^2}\right] = -1+\infty = \infty$

c) $\int\limits_0^2 \frac{2}{x^2}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^2 \frac{2}{x^2}dx = \lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{-2}{x}\right]_a^2 = \lim\limits_{a\to 0}\left[-1-\frac{-2}{a}\right] = -1+\infty = \infty$

d) $\int\limits_1^2 \frac{x}{x^2-1}dx = \lim\limits_{a\to 1}\int\limits_a^2 \frac{x}{x^2-1}dx = \lim\limits_{a\to 1}\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_a^2 = \lim\limits_{a\to 1}\frac{1}{2}\cdot\left[\ln 3 - \ln\left|a^2-1\right|\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln 3 - (-\infty)\right] = \infty$

e) $\int\limits_1^3 \frac{1}{x-1}dx = \lim\limits_{a\to 1}\int\limits_a^3 \frac{1}{x-1}dx = \lim\limits_{a\to 1}\left[\ln|x-1|\right]_a^3 = \lim\limits_{a\to 1}\left[\ln 2 - \ln|a-1|\right] = \ln 2 - (-\infty) = \infty$

f) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{b\to 1}\int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{b\to 1}\left[\arcsin\, x\right]_0^b = \lim\limits_{b\to 1}\left[\arcsin b - \arcsin 0\right]_a^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

g) $\int\limits_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \lim\limits_{a\to 2}\int\limits_a^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \lim\limits_{a\to 2}\frac{3}{2}\cdot\left[(x-2)^{2/3}\right]_a^3 = \lim\limits_{a\to 2}\frac{3}{2}\cdot\left[1-(a-2)^{2/3}\right] = \frac{3}{2}\cdot(1-0) = \frac{3}{2}$

h) $\int\limits_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim\limits_{a\to 1}\int\limits_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim\limits_{a\to 1}\left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_a^3 = 2\cdot\lim\limits_{a\to 1}\left[\sqrt{2}-\sqrt{a-1}\right] = 2\cdot\left(\sqrt{2}-0\right) = 2\cdot\sqrt{2} \approx 2{,}8284$

i) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 \ln x\cdot 1\, dx = \lim\limits_{a\to 0}\left[x\cdot\ln x - x\right]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}\left[-1-a\cdot\ln a + a\right] = (-1-0) = -1;$

$\lim\limits_{a\to 0+}(a\cdot\ln a) = 0$, Regel von de l'Hospital, Lehrbuch: Beispiel 5.6 b), Seite 143

j) $\int\limits_0^1 x\cdot\ln x\, dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 x\cdot\ln x\, dx = \lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}\left[-\frac{1}{4}-\left(\frac{a^2\cdot\ln a}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4};$

Integration siehe Aufgabe 6.46 a); $\lim\limits_{a\to 0+}(a^2\cdot\ln a) = 0$ Regel von de l'Hospital wie i)

6.71 a) $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty t^0\cdot e^{-t}dt = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-t}dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right] = 0+1 = 1$

b) $\Gamma(2) = \int\limits_0^\infty t\cdot e^{-t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b t\cdot e^{-t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-(t+1)\cdot e^{-t}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-(b+1)\cdot e^{-b}+1\right] = 0+1 = 1,$

weil $\lim\limits_{b\to\infty}(b+1)\cdot e^{-b} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{b+1}{e^{-b}} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{-e^{-b}} = 0$ ... Regel von de l'Hospital

c) $\Gamma(3) = \int\limits_0^\infty t^2\cdot e^{-t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^\infty t^2\cdot e^{-t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-(t^2+2t+2)\cdot e^{-t}\right]_0^b =$

$= \lim\limits_{t\to\infty}\left[-(b^2+2b+2)\cdot e^{-b}+2\right] = 0+2 = 2$, weil $\lim\limits_{t\to\infty}(b^2+2b+2)\cdot e^{-b} = 0$ ... de l'Hospital

6.72 a) $F(s) = \int\limits_0^\infty t\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b t\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\left(\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\left(\frac{b}{s}+\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot b}+\frac{1}{s^2}\right] =$

$= 0+\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$, weil $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{b}{s}\cdot e^{-s\cdot b} = \frac{1}{s}\cdot\lim\limits_{b\to\infty} b\cdot e^{-s\cdot b} = 0$ auf Grund der Regel von de l'Hospital

b) $F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-3t}\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-(3+s)\cdot t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s+3}\cdot e^{-(3+s)\cdot t}\right]_0^b =$

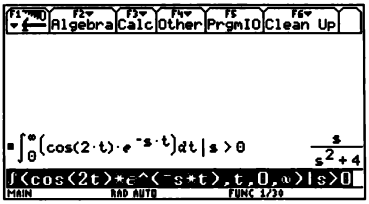
$= -\frac{1}{s+3}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^{-(3+s)\cdot b}-1\right] = -\frac{1}{s+3}\cdot(0-1) = \frac{1}{s+3}$

6.72 c) $F(s)=\int_0^\infty \sin t\cdot e^{-s\cdot t}dt=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s^2+1}\cdot(s\cdot\sin t+\cos t)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^b=$

$=-\frac{1}{s^2+1}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[(s\cdot\sin b+\cos b)\cdot e^{-s\cdot b}-1\right]=-\frac{1}{s^2+1}\cdot[0-1]=\frac{1}{s^2+1}$

d) $F(s)=\int_0^\infty \cos 2t\cdot e^{-s\cdot t}dt=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s^2+4}\cdot(2\sin 2t-s\cdot\cos 2t)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^b=$

$=\frac{1}{s^2+4}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[(2\sin 2b-s\cdot\cos 2b)\cdot e^{-s\cdot b}-(-s)\right]=\frac{1}{s^2+4}\cdot[0+s]=\frac{s}{s^2+4}$



Mathcad:

Hier ist zu beachten, dass das Integral nur existiert, wenn $s\ge 0$. Dies muss mitgeteilt werden!

$\int_0^\infty \cos(2t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt$ annehmen, $s\ge 0\ \to\ \frac{s}{s^2+4}$

6.73 $\mu=\int_0^\infty t\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}dt=\lambda\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b t\cdot e^{-\lambda\cdot t}dt=\lambda\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\left(\frac{t}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\left(\frac{b}{\lambda}+\lambda\right)\cdot e^{-\lambda\cdot b}+\frac{1}{\lambda}\right]=$

$=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}0002}=5000$ h; hier wurde verwendet, dass $\lim\limits_{b\to\infty} b\cdot e^{-\lambda\cdot b}=0$ (de l'Hospital)

6.74 $\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{\pi}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b\frac{1}{1+x^2}dx=$

$=\frac{1}{\pi}\cdot\lim\limits_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^c+\frac{1}{\pi}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}[\arctan x]_c^b=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\arctan c-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan c\right)=1$

6.75 a) $\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)^2}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1+b}+1\right]=-0+1=1$

b) $\int_0^\infty\frac{1}{(1+2x)^{3/2}}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+1\right]=-0+1=1$

c) $\int_0^\infty\frac{6x}{(1+x)^4}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{3x+1}{(x+1)^3}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{3b+1}{(b+1)^3}+1\right]=-0+1=1$ (de l'Hospital)

d) $\int_0^\infty\frac{8x}{(1+2x)^3}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{4x+1}{(2x+1)^2}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{4b+1}{(2b+1)^3}+1\right]=-0+1=1$ (de l'Hospital)

e) $\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^b\frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\left[\arctan\sqrt{x}\right]_0^b=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=1$

f) $\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{-x/2}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\int_0^b x\cdot e^{-x/2}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left[-(2x+4)\cdot e^{-x/2}\right]_0^b=$

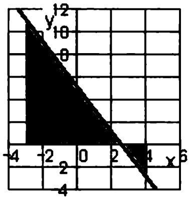
$=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left[-(2b+4)\cdot e^{-b/2}+4\right]=\frac{1}{4}\cdot[0+4]=1$ (de l'Hospital)

6.76 $Q=\int_0^\infty i\,dt=\int_0^\infty\frac{U_0}{R}e^{-t/RC}dt=\frac{U_0}{R}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t/RC}dt=\frac{U_0}{R}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[-RC\cdot e^{-t/RC}\right]_0^b=$

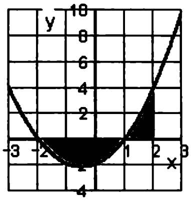
$=\frac{U_0}{R}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[-RC\cdot e^{-b/RC}+RC\right]=U_0\cdot C\cdot[-0+1]=C\cdot U_0$

7 Anwendungen der Integralrechnung

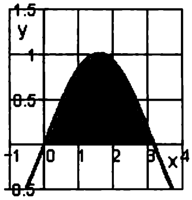
7.1



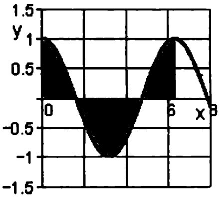
Zu a)



zu b)



zu c)



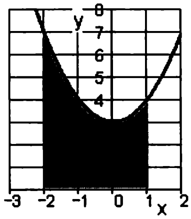
zu d)

a) $-2x+5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$; $A_1 = \int\limits_{-3}^{2,5}(-2x+5)\,dx = 30{,}25$; $A_2 = \left|\int\limits_{2,5}^{3}(-2x+5)\,dx\right| = 2{,}25$; $A = A_1 + A_2 = 32{,}5$

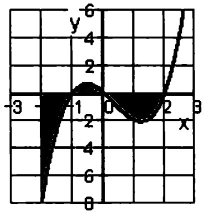
b) $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = 1;\ \ A = \left|\int\limits_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx\right| + \int\limits_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3} = 6{,}333$

c) $A = \int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx = 2$

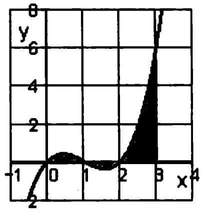
d) $\cos x = 0$ für $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{3\pi}{2}$; $A = \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx + \left|\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx\right| + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx = 1+2+1 = 4$



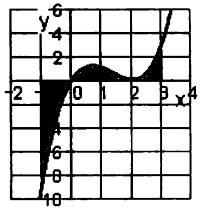
zu e)



zu f)



zu g)



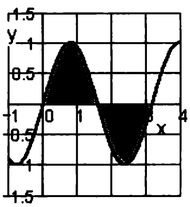
zu h)

e) $A = \int\limits_{-2}^{1}(x^2+3)\,dx = 12$

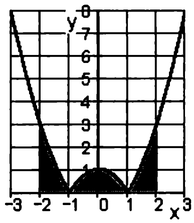
f) $x\cdot(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$; $\left|\int\limits_{-2}^{-1}f(x)\,dx\right| + \int\limits_{-1}^{0}f(x)\,dx + \left|\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx\right| = \frac{37}{12} + \frac{5}{12} + \frac{16}{12} = 6{,}17$

g) $x\cdot(x^2-3x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$; $A = \int\limits_{0}^{1}f(x)\,dx + \left|\int\limits_{1}^{2}f(x)\,dx\right| + \int\limits_{2}^{3}f(x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2{,}75$

h) $x\cdot(x^2-4x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = 2$; $A = \left|\int\limits_{-1}^{0}f(x)\,dx\right| + \int\limits_{0}^{3}f(x)\,dx = \frac{43}{12} + \frac{9}{4} = \frac{35}{6} = 5{,}83$



zu i)



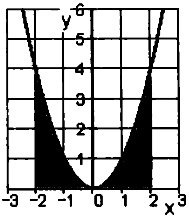
zu j)

i) $A = \int\limits_{0}^{\pi/2}f(x)\,dx + \left|\int\limits_{\pi/2}^{\pi}f(x)\,dx\right| = 1+1 = 2$

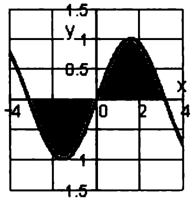
j) $\frac{A}{2} = \int\limits_{0}^{1}(1-x^2)\,dx + \int\limits_{1}^{2}(x^2-1)\,dx = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$;

$A = 2\cdot 2 = 4$

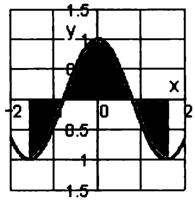
7.2



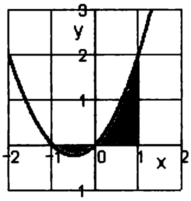
Zu a)



zu b)



zu c)



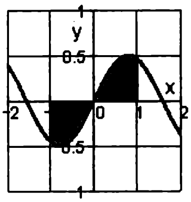
zu d)

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, d.h. gerade Funktion; $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2\cdot\frac{8}{3} = 5{,}333$

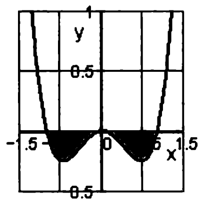
b) $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, d.h. ungerade Funktion; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$

c) $\cos(-2x) = \cos(2x)$, d.h. gerade Funktion; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi} \cos(2x)\,dx = 2\cdot 0 = 0$

d) $(-x)^2+(-x) = x^2 - x \neq x^2 + x$, d.h. weder gerade noch ungerade; $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$



zu e)



zu f)

e) $\sin(-x)\cdot\cos(-x) = -\sin(x)\cdot\cos(x)$,

d.h. ungerade Funktion; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cdot\cos x\,dx = 0$

f) $(-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2$, d.h. gerade Funktion;

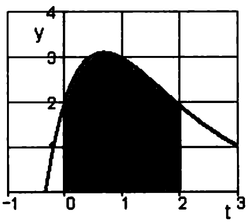
$\int_{-1}^{1} \left(x^4 - x^2\right)dx = 2\cdot\int_{0}^{1}\left(x^4 - x^2\right)dx = -\frac{4}{15}$

7.3 Parabel: $y = a\cdot x^2$; für $x = 4$ ist $y = 2$: $2 = a\cdot 4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$; $A_1 = 2\cdot\int_{0}^{4}\frac{1}{8}\cdot x^2\,dx = \frac{16}{3}$ ist der Inhalt der Fläche unter der Parabel; Fläche über der Parabel: $A_2 = 8\cdot 2 - 16/3 = 32/3$

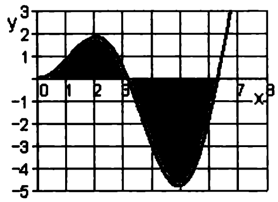
7.4 An der Stelle $x = 3$ ist $y = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$. Fläche unter dem Graphen: $\int_{0}^{3}\sqrt{2x}\,dx = 2\cdot\sqrt{6}$;

Fläche über dem Graphen: $3\cdot\sqrt{6} - 2\cdot\sqrt{6} = \sqrt{6} = 2{,}45$

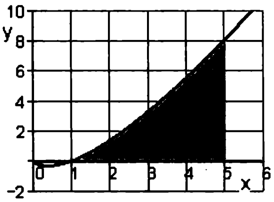
7.5



Zu a)



zu b)



zu c)

a) Part. Integration: $\int \underbrace{(2+6t)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{v'}\,dt = -(6t+8)\cdot e^{-t} + C$; $\int_{0}^{2}(2+6t)e^{-t}\,dt = \left[-(6t+8)\cdot e^{-t}\right]_{0}^{2} = 5{,}293$

7.5 b) $x \cdot \sin x = 0$ für $x = \pi$; part. Integration: $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = \sin x - x \cdot \cos x + C$;

$[\sin x - x \cdot \cos x]_0^{\pi} = \pi$; $[\sin x - x \cdot \cos x]_{\pi}^{2\pi} = -2\pi - \pi = -3\pi$; $A = \pi + |-3\pi| = 4\pi = 12{,}57$

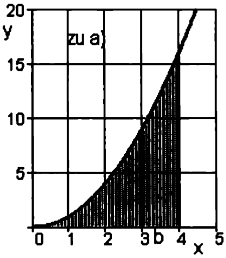
c) Kein Vorzeichenwechsel; Integration siehe 6.46 a): $\int\limits_1^5 x \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \cdot (2 \cdot \ln x - 1)\right]_1^5 = 14{,}12$

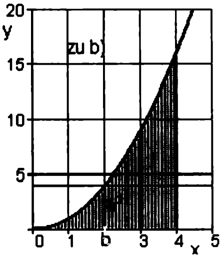
7.6 a) $\int\limits_0^b \sin x dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$; $-\cos b + 1 = \frac{1}{2} \cdot (0+1)$; $2 \cos b = 1$; $b = \frac{\pi}{3} = 1{,}05$

b) $\int\limits_0^b \sin x dx = \frac{2}{5} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$; $-\cos b + 1 = \frac{2}{5} \cdot (0+1)$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $b = 0{,}927$

7.7 a) $\int\limits_0^b x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^4 x^2 dx$, d.h. $\frac{b^3}{3} = \frac{32}{3}$ oder

$b = \sqrt[3]{32} = 3{,}17$; Gerade: $x = 3{,}17$





b) Die gesuchte Gerade schneidet den Graphen an der Stelle b;

$\int\limits_0^b x^2 dx + (4-b) \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^4 x^2 dx$, d.h.

$\frac{b^3}{3} + (4-b) \cdot b^2 = \frac{32}{3}$ oder $b^3 - 6b^2 + 16 = 0$, kubische Gleichung für b $\Rightarrow$ $b = 2$ (etwa durch gezieltes Probieren); Gerade: $y = b^2 = 4$

7.8 $\left|\int\limits_a^1 \ln x dx\right| = \int\limits_1^2 \ln x dx$; $\int\limits_a^1 \ln x \, dx = [x \cdot (\ln x - 1)]_a^1 = 1 \cdot (\ln 1 - 1) - a \cdot (\ln a - 1) = -1 - a \cdot (\ln a - 1) < 0$;

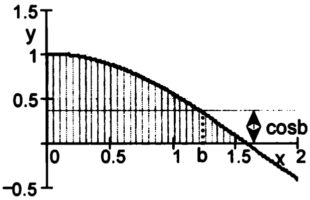
$\int\limits_1^2 \ln x \, dx = [x \cdot (\ln x - 1)]_1^2 = 2 \cdot \ln 2 - 1$; damit: $|-1 - a \cdot (\ln a - 1)| = 1 + a \cdot (\ln a - 1) = 2 \cdot \ln 2 - 1$ oder

$a \cdot (\ln a - 1) = 2 \cdot (\ln 2 - 1)$ $\Rightarrow$ $a = 0{,}263$ (etwa durch gezieltes Probieren)

7.9 Obere Fläche und untere Fläche sind inhaltsgleich:

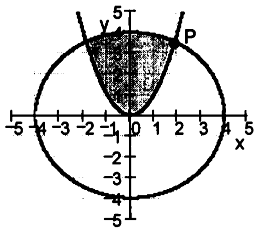
$\int\limits_0^b \cos x \, dx - b \cdot \cos b = b \cdot \cos b + \int\limits_b^{\pi/2} \cos x \, dx$; d.h.

$\sin b - b \cdot \cos b = b \cdot \cos b + 1 - \sin b$ oder $2 \cdot \sin b = 1 + 2b \cdot \cos b$
$\Rightarrow$ $b = 1{,}202$ (etwa durch gezieltes Probieren);
Gerade: $y = \cos b = 0{,}360$



7.10 a) Schnittpunkt P: $x^2 = \sqrt{16 - x^2}$ oder $x^4 = 16 - x^2$; Subst.: $u = x^2$ ergibt $u^2 + u - 16 = 0$ $\Rightarrow$ $u_1 = 3{,}531$ ($u_2 = -5{,}531$ nicht möglich); $x^2 = 3{,}531 \Rightarrow x_1 = 1{,}879$; $x_2 = -1{,}879$; $y = x_1^2 = 3{,}531$; $P(1{,}879/3{,}531)$;

$A = 2 \cdot \int\limits_0^{1{,}879} \left(\sqrt{16 - x^2} - x^2\right) dx$; $f(x) = \sqrt{16 - x^2} - x^2$;



Keplerformel: $A \approx 2 \cdot \frac{1{,}879}{6} \cdot (4 + 4 \cdot 3{,}00544 + 0) = 10{,}03$.

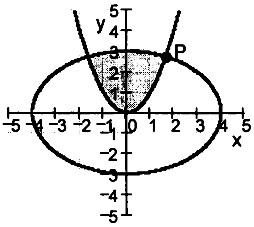
Genau auf 2 Nachkommastellen: 10,04

7.10 b) Schnittpunkt P: $x^2 = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{16-x^2}$ oder $16\cdot x^4 = 144 - 9x^2$;

Subst.: $u = x^2$ ergibt $16u^2 + 9u - 144 = 0 \Rightarrow u_1 = 2{,}732$
($u_2 = -2{,}732$ nicht möglich); $x^2 = 2{,}732 \Rightarrow x_1 = 1{,}653$; $x_2 = -1{,}653$
$y = x_1^{\,2} = 2{,}732$; P(1,653/2,732);

$$A = 2\cdot\int\limits_0^{1{,}653}\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{16-x^2}-x^2\right)dx\,;\; f(x) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{16-x^2}-x^2\,;$$

Keplerformel: $A \approx 2\cdot\frac{1{,}653}{6}\cdot(3+2{,}25216+0) = 6{,}62$



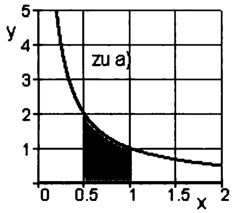
7.11 $\int\limits_0^{\infty}\left[\vartheta_\infty - \vartheta_\infty\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]dt = \lim\limits_{b\to\infty}\vartheta_\infty\int\limits_0^{b} e^{-t/\tau}\,dt = \vartheta_\infty\cdot\tau$

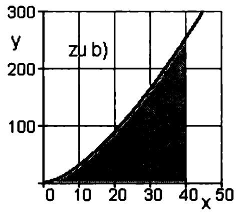
7.12 a) $\dot{x}(t) = -1/t^2$;

$$A = \int\limits_1^2 y\cdot\dot{x}\,dt = -\int\limits_1^2\frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^2 = 0{,}693$$

b) $\dot{x}(t) = 2t$;

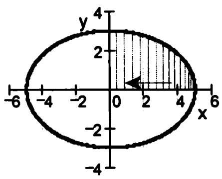
$$A = \int\limits_0^{2\pi} y\cdot\dot{x}\,dt = 2\cdot\int\limits_0^{2\pi} t^4\,dt = \frac{2}{5}\cdot\left[t^5\right]_0^{2\pi} = 3917$$



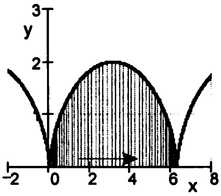


7.13 $\dot{x}(t) = -a\cdot\sin t\,;\; A = 4\cdot\int\limits_0^{\pi/2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = \left|-4\cdot a\cdot b\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt\right| = a\cdot b\cdot\pi$; Integration $\int\sin^2 t\,dt$ siehe Aufg. 6.31 a); negatives Vorzeichen des Integrals wie in Aufgabe 7.14 a)

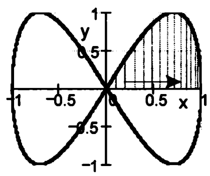
7.14



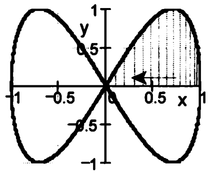
Zu a)



zu b)



zu c)



zu d)

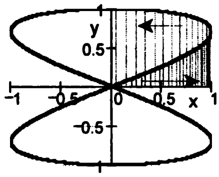
a) $\int\limits_0^{\pi/2} y\cdot\dot{x}\,dt = -15\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = -\frac{15\pi}{4}$, Integral negativ, weil die Integration (bei $y \ge 0$) von $x = 5$ bis $x = 0$; Integration $\int\sin^2 t\,dt$ siehe Aufg. 6.31 a); $A = 4\cdot|-15\pi/4| = 15\pi$;

b) $\int\limits_0^{2\pi} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi$; Integral positiv, weil die Integration (bei $y \ge 0$) von $x = 0$ bis $x = 2\pi$; Integration $\int\cos^2 t\,dt$ siehe Aufg. 6.31 c); $A = 3\pi$

c) $\int\limits_0^{\pi/2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = \int\limits_0^{\pi/2}\sin(2t)\cdot\cos t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} 2\cdot\sin t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{2}{3}$; Integral positiv, weil die Integration (bei $y \ge 0$) von $x = 0$ bis $x = 1$; $A = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; Integration von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ würde 0 ergeben!

d) $\int\limits_0^{\pi/2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = -\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2t)\cdot\sin t\,dt = -\int\limits_0^{\pi/2} 2\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\,dt = -\frac{2}{3}$; Integral negativ, weil nun im Gegensatz zu c) die Integration von $x = 1$ bis $x = 0$; $A = 4\cdot|-2/3| = 8/3$;

7.14 e) $\int_0^{\pi/4} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \sin t\cdot 2\cos(2t)\,dt = 2\int_0^{\pi/4}\left(2\cos^2 t-1\right)\cdot\sin t\,dt =$

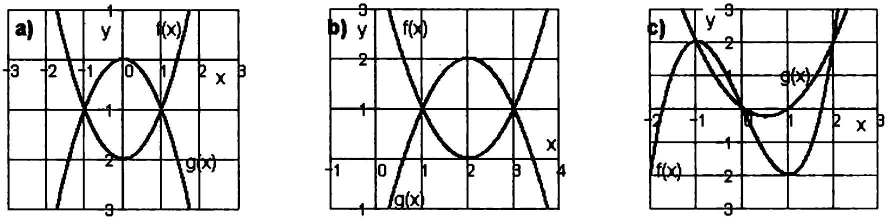


$= \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$; Integral positiv, weil Integration von x = 0 bis x = $\pi/4$;

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin t\cdot 2\cos(2t)\,dt = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}$; Integral negativ, weil Integration von

$x = \pi/2$ bis $x = \pi/4$; $A = 4\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = \frac{8}{3}$, gleiches Ergebnis wie c) oder d)

7.15

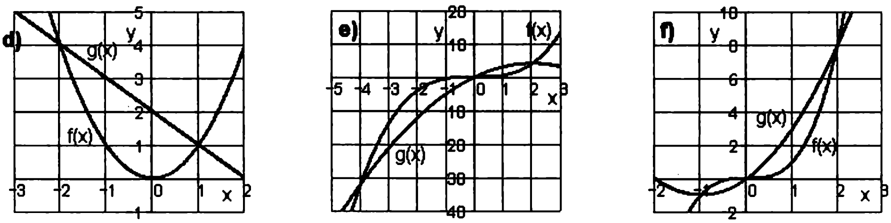


a) $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$; $g(x) \geq f(x)$ in $[-1, 1]$, $A = \int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx = \frac{8}{3}$

b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$; $g(x) \geq f(x)$ in $[1, 3]$; $A = \int_{1}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \frac{8}{3}$

c) $x^3-3x = x^2-x$ oder $x^3-x^2-2x = x\cdot(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ sowie $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ als Lösungen von $x^2+x-2 = 0$; $f(x) \geq g(x)$ in $[-1, 0]$, $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 2]$;

$\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx = \frac{5}{12}$; $\int_{0}^{2}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \frac{8}{3}$; $A = \frac{5}{12}+\frac{8}{3} = \frac{37}{12}$



d) $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$; $g(x) \geq f(x)$ in $[-2, 1]$, $A = \int_{-2}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \frac{9}{2}$

e) $f(x) = g(x)$ oder $x^3+2x^2-8x = x\cdot(x^2+2x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ sowie $x_2 = -4$ und $x_3 = 2$ als Lösungen von $x^2+2x-8 = 0$; $f(x) \geq g(x)$ in $[-4, 0]$; $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 2]$;

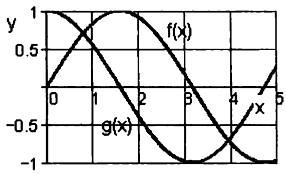
$\int_{-4}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx = \frac{64}{3}$; $\int_{0}^{2}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \frac{10}{3}$; $A = \frac{64}{3}+\frac{10}{3} = \frac{74}{3}$

f) $f(x) = g(x)$ oder $x^3-x^2-2x = x\cdot(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ sowie $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ als Lösungen von $x^2-x-2 = 0$; $f(x) \geq g(x)$ in $[-1, 0]$, $g(x) \geq f(x)$ in $[0, 2]$;

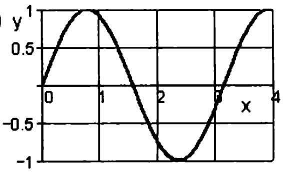
$\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx = \frac{5}{12}$; $\int_{0}^{2}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \frac{8}{3}$; $A = \frac{5}{12}+\frac{8}{3} = \frac{37}{12}$

7.16 $\sin x = \cos x$; Division durch $\cos x$ ergibt $\tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \pi/4$ und $x_2 = x_1 + \pi = 5\pi/4$ als erste beiden positiven Schnittstellen;

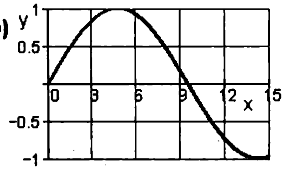
$f(x) \geq g(x)$ in $[\pi/4, 5\pi/4]$; $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx = 2\cdot\sqrt{2}$



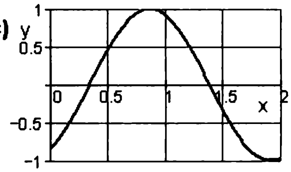
7.17 a)



b)



c)

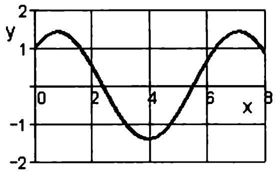


a) $\sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ sowie π; damit $x = 0$ sowie $\pi/2 = 1{,}57$; $A = \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = 1$

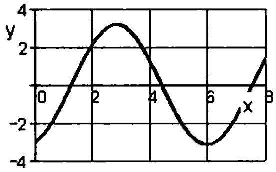
b) $\sin\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = 0$ sowie π; damit $x = 0$ sowie $3\pi = 9{,}42$; $A = \int\limits_0^{3\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx = 6$

c) $\sin(3x-1) = 0 \Rightarrow 3x-1 = 0$ sowie π; damit $x = \frac{1}{3}$ sowie $\frac{\pi+1}{3} = 1{,}38$; $A = \int\limits_{1/3}^{(\pi+1)/3} \sin(3x-1)\,dx = \frac{2}{3}$

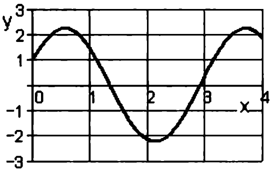
d)



e)



f)



d) $\sin x + \cos x = 0$ oder nach Division durch $\cos x$: $\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} = 2{,}36$ sowie

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} = 5{,}50$; $A = \left| \int\limits_{3\pi/4}^{7\pi/4} (\sin x + \cos x)\,dx \right| = 2\cdot\sqrt{2}$

e) $\sin x - 3\cdot\cos x = 0$ oder nach Division durch $\cos x$: $\tan x = 3 \Rightarrow x = 1{,}249$ sowie

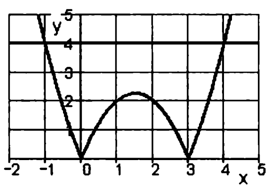
$x = 1{,}249 + \pi = 4{,}391$; $A = \int\limits_{1{,}249}^{4{,}391} (\sin x - 3\cdot\cos x)\,dx = 6{,}32$

f) $2\cdot\sin(2x) + \cos(2x) = 0$ oder nach Division durch $\cos(2x)$: $\tan(2x) = -1/2 \Rightarrow$

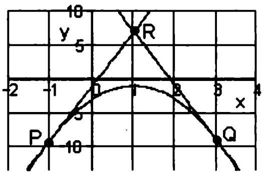
$2x = -0{,}464 + \pi = 2{,}678$ sowie $2x = -0{,}464 + 2\pi = 5{,}820$, damit $x = 1{,}339$ oder $x = 2{,}910$;

$A = \left| \int\limits_{1{,}339}^{2{,}910} (2\cdot\sin 2x + \cos 2x)\,dx \right| = 2{,}24$

7.18 $f(x) = |x^2 - 3x| = x^2 - 3x$, wenn $x^2 - 3x \geq 0$;
dagegen ist $f(x) = |x^2 - 3x| = -(x^2 - 3x)$, wenn $x^2 - 3x < 0$;
Nullstellen: $x^2 - 3x = x\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$;
$x^2 - 3x < 0$ für $0 < x < 3$, außerhalb ist $x^2 - 3x \geq 0$.
Integrationsgrenzen: $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x = 4$ oder
$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = 4$; innerhalb der Integrationsgrenzen ist $g(x) = 4 \geq f(x)$.

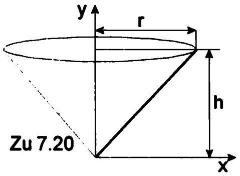


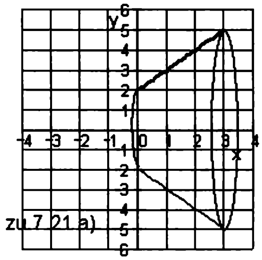
$$A = \int\limits_{-1}^{0} [4 - (x^2 - 3x)]\,dx + \int\limits_0^3 [4 - (-x^2 + 3x)]\,dx + \int\limits_3^4 [4 - (x^2 - 3x)]\,dx = \frac{13}{6} + \frac{15}{2} + \frac{13}{6} = \frac{71}{6} = 11{,}83$$

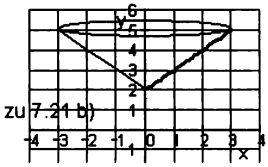


7.19 $y' = -4x + 4 \Rightarrow k_1 = y'(-1) = 8;\ k_2 = y'(3) = -8;$
$P(-1/y_P);\ y_P = -2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 3 = -9;$ analog $Q(3/-9);$
Tangente t_P: $-9 = 8\cdot(-1) + d \Rightarrow d = -1;\ y = 8x - 1;$
Tangente t_Q: $y = -8x + 15;$
Schnittpunkt R der Tangenten: $8x - 1 = -8x + 15 \Rightarrow$
$x = 1;\ R(1/7);$

$$A = \int_{-1}^{1}\left[8x-1-\left(-2x^2+4x-3\right)\right]dx + \int_{1}^{3}\left[-8x+15-\left(-2x^2+4x-3\right)\right]dx == \frac{16}{3}+\frac{16}{3}=\frac{32}{3}=10{,}67$$





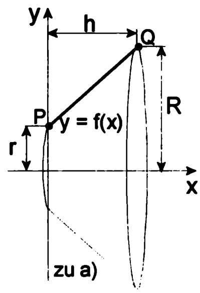


7.20 $y = \frac{h}{r}\cdot x \Rightarrow x = \frac{r}{h}\cdot y;\quad V_y = \frac{h^2}{r^2}\cdot\int_0^h y^2\,dy = \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$

7.21 a) $V_x = \pi\cdot\int_0^3 (x+2)^2 dx = \frac{\pi}{3}\cdot\left[(x+2)^3\right]_0^3 = \frac{\pi}{3}\cdot(125-8) = 39\pi$

b) $V_y = \pi\cdot\int_2^5 (y-2)^2 dy = \frac{\pi}{3}\cdot\left[(y-2)^3\right]_2^5 = \frac{\pi}{3}\cdot(27-0) = 9\pi$

7.22 a) Erzeugende liegt auf der Geraden $y = f(x)$ durch $P(0/r)$ und $Q(h/R)$:

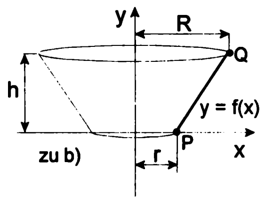


$$y = f(x) = \frac{R-r}{h}\cdot x + r;\quad y^2 = \frac{(R-r)^2\cdot x^2}{h^2} + 2\cdot\frac{R-r}{h}\cdot r\cdot x + r^2;$$

$$V_x = \pi\cdot\int_0^h\left(\frac{(R-r)^2\cdot x^2}{h^2} + 2\cdot\frac{R-r}{h}\cdot r\cdot x + r^2\right)dx =$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{(R-r)^2\cdot x^3}{3\cdot h^2} + \frac{R-r}{h}\cdot r\cdot x^2 + r^2\cdot x\right]_0^h = \frac{\pi\cdot h}{3}\cdot\left(R^2 + R\cdot r + r^2\right)$$

b) Erzeugende liegt auf der Geraden $y = f(x)$ durch $P(r/0)$ und $Q(R/h)$:

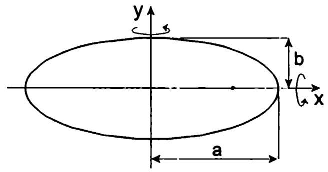


$$y = \frac{h}{R-r}\cdot x - \frac{r\cdot h}{R-r} \Rightarrow x = \frac{R-r}{h}\cdot y + r;$$

$$x^2 = \frac{(R-r)^2\cdot y^2}{h^2} + 2\cdot\frac{R-r}{h}\cdot r\cdot y + r^2;$$

$$V_y = \pi\cdot\int_0^h\left(\frac{(R-r)^2\cdot y^2}{h^2} + 2\cdot\frac{R-r}{h}\cdot r\cdot y + r^2\right)dy = \text{ weiter wie a)}$$

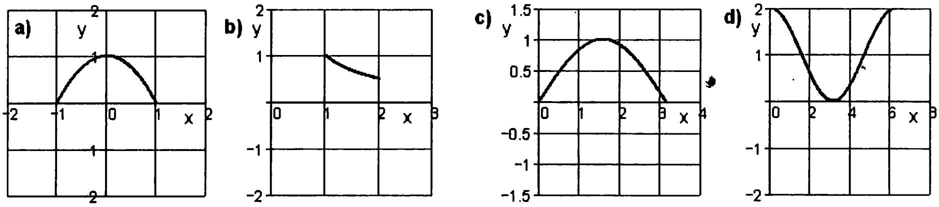
7.23 a) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$; $\quad V_x = \frac{2 \cdot b^2 \cdot \pi}{a^2} \cdot \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx =$



$$= \frac{2 \cdot b^2 \cdot \pi}{a^2} \cdot \left[a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2 \cdot b^2 \cdot \pi}{a^2} \cdot \left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{4\pi \cdot a \cdot b^2}{3}$$

b) $x^2 = \frac{a^2}{a^2}\left(b^2 - y^2\right)$; $\quad V_y = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \pi}{b^2} \cdot \int\limits_0^b \left(b^2 - x^2\right) dy = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \pi}{b^2} \cdot \left[b^2 \cdot y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{4\pi \cdot a^2 \cdot b}{3}$

7.24

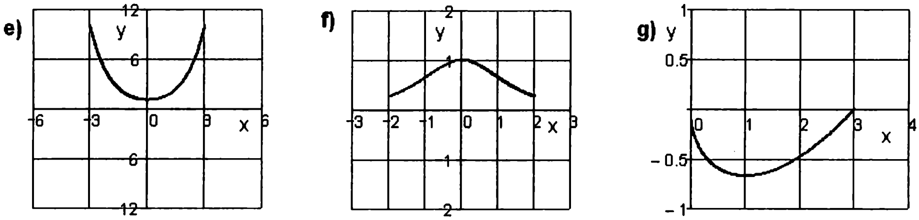


a) $y^2 = 1 - 2x^2 + x^4$; $\quad V = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = = 2\pi \cdot \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{16\pi}{15} \approx 3{,}351$

b) $y^2 = \frac{1}{x^2}$; $\quad V = \pi \cdot \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\pi \cdot \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}$

c) $y^2 = \sin^2 x$; $\quad V = \pi \cdot \int\limits_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[x - \sin x \cdot \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$

d) $V = \pi \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos x + \cos^2 x\right) dx = \pi \cdot \left[x + 2\sin x + \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2$



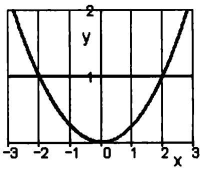
e) $y^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$; $\quad V = \frac{2\pi}{4} \cdot \int\limits_0^3 \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = 326{,}3$

f) $y^2 = \frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}$; $\quad V = 8\pi \cdot \int\limits_0^2 \frac{dx}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}$; $\; u = e^{2x}$; $\; dx = \frac{du}{2u}$;

$$V = 8\pi \cdot \int\limits_{\dots}^{\dots} \frac{du}{2u \cdot (u + 2 + 1/u)} = 4\pi \cdot \int\limits_{\dots}^{\dots} \frac{du}{(u+1)^2} = -4\pi \cdot \left[\frac{1}{u+1}\right]_{\dots}^{\dots} = -4\pi \cdot \left[\frac{1}{e^{2x} + 1}\right]_2^{-2} = 6{,}057$$

g) $V = \frac{\pi}{9} \cdot \int\limits_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) \, dx = \frac{\pi}{9} \cdot \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3\pi}{4}$

7.25 a) $0{,}25\cdot x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = -2;\; x_2 = 2;\; y' = \frac{x}{2}$; Länge des Parabelbogens:

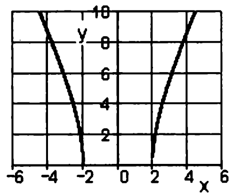


$$s = 2\cdot\int_0^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{4+x^2}\,dx \approx \frac{2}{6}\cdot\left[2+4\cdot\sqrt{5}+\sqrt{8}\right] = 4{,}59;$$

Gesamtumfang $u = 4{,}49 + 4 = 8{,}59$

b) $A = 2\cdot\int_0^2 \left(1-0{,}25x^2\right)dx = 2\cdot\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ c) $x^2 = 4y;\;\; V = \pi\int_0^1 4y\,dy = 2\pi$

7.26 a) $x^2 = \frac{4}{25}\cdot\left(y^2+25\right);\;\; V = \frac{4\pi}{25}\cdot\int_0^{10}\left(y^2+25\right)dy = \frac{280\pi}{3} = 293{,}2$



b) $y = \pm\frac{5}{2}\cdot\sqrt{x^2-4};\;\; \frac{5}{2}\cdot\sqrt{x^2-4} = 10 \;\Rightarrow\; x_1 = 2\cdot\sqrt{5} = 4{,}472;$

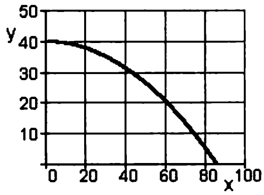
$$A = 2\cdot\left(10\cdot 2\cdot\sqrt{5}-\frac{5}{2}\cdot\int_2^{2\cdot\sqrt{5}}\sqrt{x^2-4}\,dx\right);$$

$$\int_2^{2\cdot\sqrt{5}}\sqrt{x^2-4}\,dx \approx \frac{2\cdot\sqrt{5}-2}{6\cdot 2}\cdot\left[0+4\cdot 1{,}6894+2\cdot 2{,}544+4\cdot 3{,}295+4\right] = 5{,}979$$

$$A = 2\cdot\left(10\cdot 2\cdot\sqrt{5}-\frac{5}{2}\cdot 5{,}979\right) = 59{,}5 \quad \text{(genaues Ergebnis: 59,2)}$$

c) $\frac{V}{2} = \frac{140\,\pi}{3} = \frac{4\pi}{25}\cdot\int_0^h\left(y^2+25\right)dy$; $h^3 + 75\cdot h - 875 = 0 \Rightarrow h = 7{,}03$ (durch gezieltes Probieren)

7.27 $y = 40-\frac{x^2}{180} = 0 \;\Rightarrow\; x = 60\cdot\sqrt{2} = 84{,}85;\;\; y' = -\frac{x}{90};$

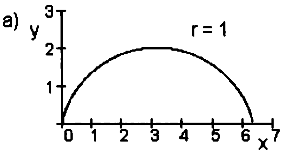


$$s = \int_0^{60\cdot\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{90^2}}\,dx = \frac{1}{90}\cdot\int_0^{60\cdot\sqrt{2}}\sqrt{90^2+x^2}\,dx \;\approx$$

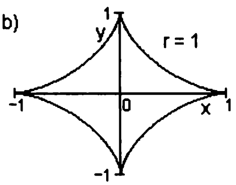
$$\approx \frac{1}{90}\cdot\frac{60\cdot\sqrt{2}}{6}\cdot\left[90+4\cdot 99{,}50+123{,}69\right] = 96{,}1\text{ m}$$

7.28 $y' = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right) = \sinh\frac{x}{a};\quad s = \int_0^b\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx = \int_0^b\cosh\frac{x}{a}\,dx = \left[a\cdot\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b = a\cdot\sinh\frac{b}{a}$

7.29 a)



b)



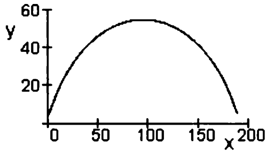
a) $\dot{x} = r\cdot(1-\cos t);\;\; \dot{y} = r\cdot\sin t;\quad s = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\cdot(1-\cos t)^2+r^2\cdot\sin^2 t}\,dt = r\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt =$

$$= r\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = r\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2\cdot r\cdot\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2r\cdot\left[2+2\right] = 8r$$

b) $\dot{x} = -3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t;\;\; \dot{y} = 3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t;$

$$s = \ldots = 4\cdot 3a\cdot\int_0^{\pi/2}\left(\sin t\cdot\cos t\right)dt = 6a\cdot\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = 6a\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} = 6a\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 6a$$

7.30 $\dot{x} = 30 - 25 \cdot \cos t$; $\dot{y} = 25 \cdot \sin t$;



$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 900 - 1500 \cdot \cos t + 625 \cdot \cos^2 t + 625 \cdot \sin^2 t =$$

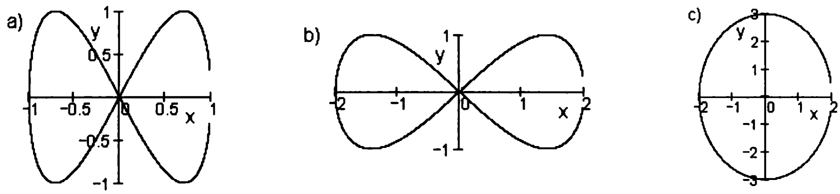
$$= 900 - 1500 \cos t + 625 \cos^2 t + 625(1 - \cos^2 t) = 1525 - 1500 \cdot \cos t$$

$$= 25 \cdot (61 - 60 \cdot \cos t);\ s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{61 - 60 \cdot \cos t}\, dt \approx 10 \cdot \frac{\pi}{6 \cdot 2} \cdot [1 + 4 \cdot 4{,}31 + 2 \cdot 7{,}81 + 4 \cdot 10{,}17 + 11] = 223{,}9 \text{ cm (genau: } 223{,}0)$$

7.31 $y' = \cos x$; $s = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx \approx 2 \cdot \frac{\pi/2}{6 \cdot 2} \cdot [1{,}414 + 4 \cdot 1{,}361 + 2 \cdot 1{,}225 + 4 \cdot 1{,}071 + 1] = 3{,}82$

7.32



a) $\dot{x}(t) = \cos t$; $\dot{y}(t) = 2 \cdot \cos(2t)$; $s = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t) + 4 \cdot \cos^2(2t)}\, dt \approx$

$\approx 4 \cdot \frac{\pi/2}{6 \cdot 2} \cdot [2{,}236 + 4 \cdot 0{,}689 + 2 \cdot 0{,}707 + 4 \cdot 1{,}465 + 2] = 9{,}56.$ Genau auf 2 Nachkommastellen: 9,43

b) $\dot{x}(t) = -2 \cdot \sin t$; $\dot{y}(t) = 2 \cdot \cos(2t)$; $s = 4 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(2t)}\, dt \approx$

$\approx 8 \cdot \frac{\pi/2}{6 \cdot 2} \cdot [1 + 4 \cdot 0{,}804 + 2 \cdot 0{,}707 + 4 \cdot 1{,}163 + 1{,}414] = 12{,}25.$ Genau auf 2 Nachkommastellen: 12,19

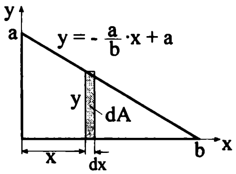
c) $\dot{x}(t) = 2 \cdot \cos t$; $\dot{y}(t) = -3 \cdot \sin(t)$; $s = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cdot \cos^2(t) + 9 \cdot \sin^2(t)}\, dt \approx$

$\approx 4 \cdot \frac{\pi/2}{6 \cdot 2} \cdot [2 + 4 \cdot 2{,}175 + 2 \cdot 2{,}550 + 4 \cdot 2{,}875 + 3] = 15{,}87$

7.33 $y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 20$; $y' = -\frac{x}{40}$; $s = \frac{2}{40} \cdot \int_0^{20} \sqrt{x^2 + 1600}\, dx \approx \frac{1}{20} \cdot \frac{20}{6} \cdot [40 + 4 \cdot 41{,}23 + 44{,}72] = 41{,}61$

7.34 a) $dA = y dx = \left(-\frac{a}{b} \cdot x + a\right) dx$ (siehe Abbildung),

$$A = \int_0^b \left(-\frac{a}{b} \cdot x + a\right) dx = \frac{a \cdot b}{2}$$

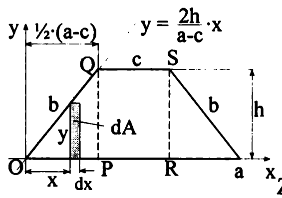


Zu a)

b) Flächenelement für das rechtwinklige Dreieck OPQ (siehe Abbildung): $dA = y dx = \frac{2h}{a-c} x\, dx$;

$A_1 = \int_0^{(a-c)/2} \frac{2h}{a-c} \cdot x\, dx = \frac{a-c}{4} \cdot h$; Flächenelement für die rechteckige Teilfläche PRSQ: $dA = h \cdot dx$,

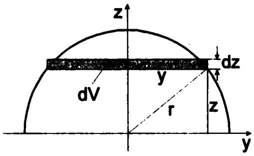
$A_2 = \int_{(a-c)/2}^{(a+c)/2} h\, dx = h \cdot c$; $A = 2A_1 + A_2 = \frac{a+c}{2} \cdot h$



Zu b)

7.35 a) $dV = \pi y^2 dz = \pi\left(r^2 - z^2\right) dz$ (siehe Abbildung);

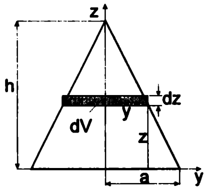
$$V = \int_0^r \pi\left(r^2 - z^2\right) dz = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3$$



b) $dV = y^2 dz$ (siehe Abbildung);

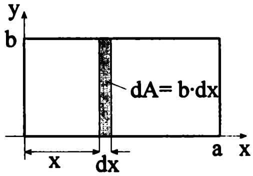
2. Strahlensatz: $(h-z) : h = y = a \Rightarrow y = \frac{a \cdot (h-z)}{h}$;

$$V = \int_0^h \left[\frac{a \cdot (h-z)}{h}\right]^2 dz = \frac{1}{3} \cdot a^2 h$$



7.36 a) $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A x \cdot dA = \frac{1}{ab} \cdot \int_0^a x \cdot b\,dx = \frac{1}{ab} \cdot b \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}$;

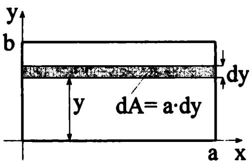
$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{1}{ab} \cdot \int_0^b y \cdot a\,dy = \frac{1}{ab} \cdot a \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$$



b) Lage des Rechtecks wie in der Abbildung; Funktion: $y = b$;

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_0^a x \cdot y\,dx = \frac{1}{a \cdot b} \cdot \int_0^a x \cdot b\,dx = \frac{b}{a \cdot b} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2};$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2\,a \cdot b} \cdot \int_0^a b^2\,dx = \frac{b^2}{2\,a \cdot b} \cdot [x]_0^a = \frac{b}{2\,a} \cdot a = \frac{b}{2}$$

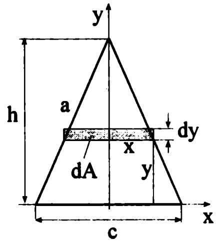


7.37 a) $x_S = 0$ (aus Symmetriegründen); $A = \frac{h \cdot c}{2}$; $da = 2x \cdot dy$

2. Strahlensatz: $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{c/2} \Rightarrow x = \frac{c \cdot (h-y)}{2h}$;

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{2}{h \cdot c} \cdot \int_0^h y \cdot 2x\,dy = \frac{4}{h \cdot c} \cdot \int_0^h y \cdot \frac{c \cdot (h-y)}{2h}\,dy =$$

$$= \frac{2}{h^2} \cdot \int_0^h y \cdot (h-y)\,dy = \frac{2}{h^2} \cdot \left[h \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - c^2/4}$$



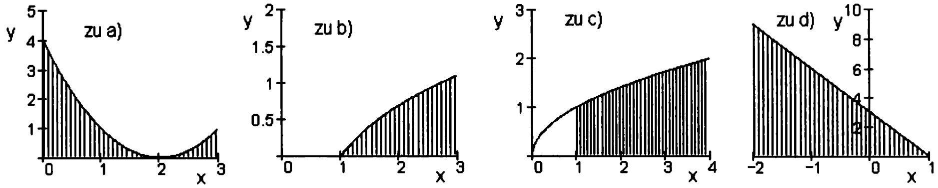
b) Lage des Dreiecks wie in der Abbildung; $x_S = 0$ wie in a);

$$\text{Funktion } y = \begin{cases} \frac{2h}{c} \cdot x + h & \text{für } -\frac{c}{2} \le x < 0 \\ -\frac{2h}{c} \cdot x + h & \text{für } 0 \le x < \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-c/2}^{c/2} y^2\,dx = \frac{1}{c \cdot h} \cdot \int_{-c/2}^{0} \left(\frac{2h}{c} \cdot x + h\right)^2 dx + \frac{1}{c \cdot h} \cdot \int_0^{c/2} \left(-\frac{2h}{c} \cdot x + h\right)^2 dx = \frac{h}{6} + \frac{h}{6} = \frac{h}{3}, \text{ wie in a)}$$

Integration durch Substitution: $u = 2 \cdot h \cdot x/c + h$ bzw. $u = -2 \cdot h \cdot x/c + h$

7.38

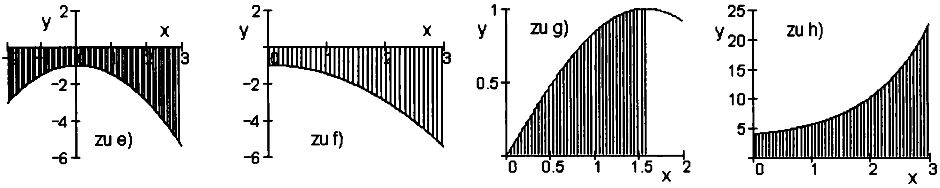


a) $A = \int_0^3 (x-2)^2 dx = 3$; $x_S = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 x \cdot (x-2)^2 dx = 0{,}75$; $y_S = \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 (x-2)^4 dx = 1{,}1$; $S(0{,}75/1{,}1)$

b) $A = \int_1^3 \ln x \, dx = 1{,}30$; $x_S = \frac{1}{1{,}30} \cdot \int_1^3 x \cdot \ln x \, dx = 2{,}27$; $y_S = \frac{1}{2{,}59} \cdot \int_1^3 (\ln x)^2 dx = 0{,}40$; $S(2{,}27/0{,}40)$

c) $A = \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{14}{3}$; $x_S = \frac{3}{14} \cdot \int_1^4 x^{3/2} dx = 2{,}66$; $\cdots y_S = \frac{3}{28} \cdot \int_1^4 x \, dx = 0{,}80$; $S(2{,}66/0{,}80)$

d) $y = -3x + 3$; $A = \int_{-2}^1 y \, dx = 13{,}5$; $x_S = \frac{1}{13{,}5} \cdot \int_{-2}^1 x \cdot y \, dx = -1$; $y_S = \frac{1}{27} \cdot \int_{-2}^1 y^2 dx = 3$; $S(-1/3)$;



e) Hier – wie auch in f) – bildet $y = 0$ die obere und $y = -(x^2 + 2)/2$ die untere Begrenzung.

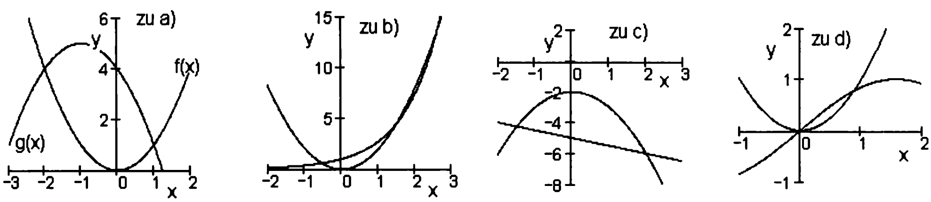
$A = \left| \int_{-2}^3 y \, dx \right| = \frac{65}{6}$; $x_S = \frac{6}{65} \int_{-2}^3 x \cdot (0 - y) dx = 0{,}98$; $y_S = \frac{3}{65} \int_{-2}^3 (0^2 - y^2) dx = -1{,}04$; $S(0{,}98/-1{,}04)$;

f) $A = \left| \int_0^3 y \, dx \right| = \frac{15}{2}$; $x_S = \frac{2}{15} \cdot \int_0^3 x \cdot (0 - y) dx = 1{,}95$; $y_S = \frac{1}{15} \cdot \int_0^3 (0^2 - y^2) \cdot dx = -1{,}61$; $S(1{,}95/-1{,}61)$

g) $A = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$; $x_S = \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \, dx = 1$; $y_S = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = 0{,}39$; $S(1/0{,}39)$

h) $A = \int_{-1}^3 y \, dx = 31{,}72$; $x_S = \frac{1}{31{,}72} \cdot \int_{-1}^3 x \cdot y \, dx = 1{,}67$; $y_S = \frac{1}{63{,}44} \cdot \int_{-1}^3 y^2 \cdot dx = 5{,}61$; $S(1{,}67/5{,}61)$

7.39



a) $f(x) = x^2$, $g(x) = -(x+1)^2 + 5$; $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -2 = a$; $x_2 = 1 = b$;

$g(x)$ ... obere Begrenzung, $f(x)$ ... untere Begrenzung; $A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = 9$;

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [g(x) - f(x)] dx = -0{,}5$; $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx = 2{,}5$; $S(-0{,}5/2{,}5)$

7.39 b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -0{,}540 = a;\ x_2 = 1{,}488 = b;\ x_3 = 2{,}618 = c;$

unteres Flächenstück: $A_1 = \int_a^b (e^x - 2x^2)dx = 1{,}544;\ x_{S1} = \frac{1}{A_1} \cdot \int_a^b x \cdot (e^x - 2x^2)dx = 0{,}42;$

$y_{S1} = \frac{1}{2A_1} \cdot \int_a^b (e^{2x} - 4x^4)dx = 1{,}22;\ S_1(0{,}42/1{,}22)$

oberes Flächenstück: $A_2 = \int_b^c (2x^2 - e^x)dx = 0{,}486;\ x_{S2} = \frac{1}{A_2} \cdot \int_b^c x \cdot (2x^2 - e^x)dx = 2{,}09;$

$y_{S1} = \frac{1}{2A_2} \cdot \int_b^c (4x^4 - e^{2x})dx = 8{,}64;\ S_2(2{,}09/8{,}64)$

c) $f(x) = -x^2-2;\ g(x) = -0{,}5 \cdot x - 5;\ f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1{,}5 = a;\ x_2 = 2 = b;\ A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = 7{,}15;$

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)]dx = 0{,}25;\ y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx = -3{,}9;\ S(0{,}25/-3{,}9)$

d) $\sin x = x^2 \Rightarrow x_1 = 0 = a;\ x_2 = 0{,}877 = b;\ A = \int_a^b (\sin x - x^2)dx = 0{,}136;$

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [\sin x - x^2]dx = 0{,}44;\ y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (\sin^2 x - x^4)dx = 0{,}33;\ S(0{,}44/0{,}33)$

7.40 $1 \le x < 5$: obere Begrenzung Gerade $y_1 = 7x/4 + 1/4$ durch A und C;
untere Begrenzung Gerade $y_2 = -x/8 + 17/8$ durch A und B,
$5 < x \le 9$: obere Begrenzung Gerade $y_3 = -2x+19$ durch C und B; untere Begrenzung Gerade y_2.

$A = \int_1^5 (y_1 - y_2)dx + \int_5^9 (y_3 - y_2)dx = 15 + 15 = 30;\ x_S = \frac{1}{A} \cdot \left[\int_1^5 x \cdot (y_1 - y_2)dx + \int_5^9 x \cdot (y_3 - y_2)dx \right] =$

$= \frac{1}{30} \cdot [55 + 95] = 5;\ y_S = \frac{1}{2A} \cdot \left[\int_1^5 (y_1^2 - y_2^2)dx + \int_5^9 (y_3^2 - y_2^2)dx \right] = \frac{1}{60} \cdot [125 + 115] = 4;\ S(5/4);$

Kontrolle: $x_S = \frac{1+9+5}{3} = 5;\ x_S = \frac{2+1+9}{3} = 4$

7.41 a) Gerade durch die Punkte (–3/0) und (4/5) als obere Begrenzung: $y_1 = 5x/7 + 15/7$; Gerade durch die Punkte (–3/–2) und (4/–2) als untere Begrenzung: $y_2 = -2$;

$A = 7 \cdot 2 + \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{63}{2} = 31{,}5$ (Rechteck und Dreieck); $x_S = \frac{1}{31{,}5} \cdot \int_{-3}^4 x \cdot \left(\frac{5x}{7} + \frac{15}{7} - (-2) \right)dx = \frac{31}{27} = 1{,}15;$

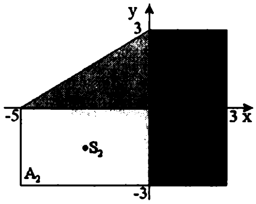
$y_S = \frac{1}{63} \cdot \int_{-3}^4 \left[\left(\frac{5x}{7} + \frac{15}{7} \right)^2 - (-2)^2 \right]dx = \frac{13}{27} = 0{,}48;\ S(1{,}15/0{,}48)$

b) $A = 4 \cdot 4 + \frac{4+6}{2} \cdot 2 = 26$ (Quadrat und Trapez); $x_S = 4$ aus Symmetriegründen;

obere Begrenzung: $y = 6$ für $1 \le x \le 7$;
untere Begrenzung: $y = -2x + 8$ für $1 \le x \le 2$, $y = 0$ für $2 < x < 6$, $y = 2x - 8$ für $6 \le x \le 7$;

$y_S = \frac{1}{2 \cdot 26} \cdot \left[\int_1^2 (6^2 - (-2x + 8)^2)dx + \int_2^6 (6^2 - 0^2)dx + \int_6^7 (6^2 - (2x - 8)^2)dx \right] = 3{,}18;\ S(4/3{,}18)$

7.41 c) Ermittlung auch durch Zerlegung in Teilflächen, etwa wie folgt:



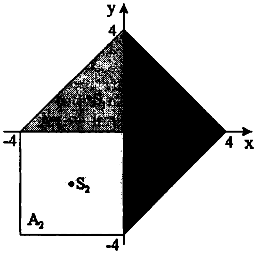
$A_1 = \frac{15}{2}$; $A_2 = 15$; $A_3 = 18$; $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{81}{2}$;

$S_1(x_1/y_1) = S_1\left(\frac{0-5+0}{3} / \frac{0+0+3}{3}\right) = S_1\left(\frac{-5}{3} / 1\right)$;

$S_2(x_2/y_2) = S_2\left(\frac{-5}{2} / \frac{3}{2}\right)$; $S_3(x_3/y_3) = S_3\left(\frac{3}{2} / 0\right)$;

$x_S = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3}{A} = -\frac{46}{81} = -0{,}57$; $y_S = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A} = -\frac{10}{27} = -0{,}37$

d) Ermittlung auch durch Zerlegung in Teilflächen, etwa wie folgt:



$A_1 = 8$; $A_2 = 16$; $A_3 = 16$; $A = A_1 + A_2 + A_3 = 40$;

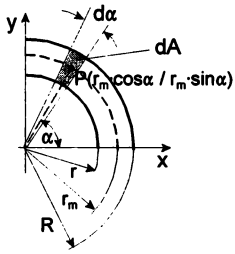
$S_1(x_1/y_1) = S_1\left(\frac{0-4+0}{3} / \frac{0+0+4}{3}\right) = S_1\left(\frac{-4}{3} / \frac{4}{3}\right)$;

$S_2(x_2/y_2) = S_2\left(-2/-2\right)$;

$S_3(x_3/y_3) = S_3\left(\frac{0+0+4}{3} / 0\right) = S_3\left(\frac{4}{3} / 0\right)$;

$x_S = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3}{A} = -\frac{8}{15} = -0{,}53$; $y_S = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A} = -\frac{8}{15} = -0{,}53$

7.42 a) $A = \frac{\pi}{4} \cdot (3600 - 3136) = 116\pi$; $r_m = \frac{R+r}{2} = 58$;



Flächenelement $dA = (R - r) \cdot r_m \cdot d\alpha = 232 \cdot d\alpha$; P ist sein Schwerpunkt;

$dM_y = r_m \cdot \cos\alpha \cdot dA = 13456 \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha$;

$dM_x = r_m \cdot \sin\alpha \cdot dA = 13456 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$;

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_y = \frac{13456}{116\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \cdot d\alpha = 36{,}9\,\text{mm};$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_x = \frac{13456}{116\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\alpha \cdot d\alpha = 36{,}9\,\text{mm}; \quad S(36{,}9\text{ mm}/36{,}9\text{ mm})$$

b) $A = \frac{3\pi}{4} \cdot (3600 - 3025) = 1354{,}81$; $r_m = \frac{R+r}{2} = 57{,}5$; $dA = (R - r) \cdot r_m \cdot d\alpha = 287{,}5 \cdot d\alpha$;

$dM_y = r_m \cdot \cos\alpha \cdot dA = 16531{,}25 \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha$;

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_y = \frac{16531{,}25}{1354{,}81} \cdot \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos\alpha \cdot d\alpha = -12{,}2\,\text{mm}; \quad y_S = x_S; \quad (-12{,}2\text{ mm}/-12{,}2\text{ mm})$$

c) $A = \frac{\pi}{2} \cdot (4900 - 4225) = 1069{,}29$; $r_m = \frac{R+r}{2} = 67{,}5$; $dA = (R - r) \cdot r_m \cdot d\alpha = 337{,}5 \cdot d\alpha$;

$x_S = 0$ mm aus Symmetreigründen; $dM_x = r_m \cdot \sin\alpha \cdot dA = 22781{,}25 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$;

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_x = \frac{22781{,}25}{1060{,}29{,}81} \cdot \int_0^{\pi} \sin\alpha \cdot d\alpha = 43{,}0\,\text{mm}; \quad S(0\text{ mm}/43{,}0\text{ mm})$$

7.43 a) $r = 45$; $A = (1/8) \cdot \pi r^2$;

$dA = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot d\alpha$ (Flächeninhalt eines Kreissektors = Bogen $r \cdot d\alpha$ mal Radius gebrochen durch 2);

dM_y = Abstand des Schwerpunktes von dA von der y–Achse mal dA = $\frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos\alpha \cdot dA$;

dM_x = Abstand des Schwerpunktes von dA von der x–Achse mal dA = $\frac{2}{3} \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot dA$;

$$x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_y = \frac{8}{\pi r^2}\int_0^{\pi/4}\frac{2}{3}\cdot r\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}r^2\,d\alpha = \frac{8r}{3\pi}\cdot[\sin\alpha]_0^{\pi/4} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3\pi}\cdot r = 27{,}0\text{ mm};$$

$$y_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_x = \frac{8}{\pi r^2}\int_0^{\pi/4}\frac{2}{3}\cdot r\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}r^2\,d\alpha = \frac{8r}{3\pi}\cdot[-\cos\alpha]_0^{\pi/4} = \frac{4\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{3\pi}\cdot r = 11{,}2\text{ mm}$$

oder kürzer: $\tan 22{,}5° = y_S/x_S$ (aus Symmetriegründen) $\Rightarrow$ $y_S = 11{,}2$ mm; S(27,0 mm/11,2 mm)

b) $r = 50$; $A = \frac{3}{8}\cdot\pi\cdot r^2$; $dA = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot d\alpha$; $dM_y = \frac{2}{3}\cdot r\cdot\cos\alpha\cdot dA$; $dM_x = \frac{2}{3}\cdot r\cdot\sin\alpha\cdot dA$;

$$x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_y = \frac{8}{3\pi r^2}\int_0^{3\pi/4}\frac{2}{3}\cdot r\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}r^2\,d\alpha = \frac{8r}{9\pi}\cdot[\sin\alpha]_0^{3\pi/4} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{9\pi}\cdot r = 10{,}0\text{ mm};$$

$$y_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_x = \frac{8}{3\pi r^2}\int_0^{3\pi/4}\frac{2}{3}\cdot r\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}r^2\,d\alpha = \frac{8r}{9\pi}\cdot[-\cos\alpha]_0^{3\pi/4} = \frac{4\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{9\pi}\cdot r = 24{,}2\text{ mm}$$

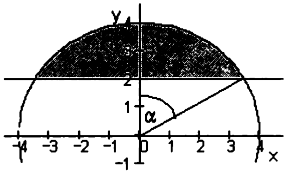
oder kürzer: $\tan 67{,}5° = y_S/x_S$ (aus Symmetriegründen) $\Rightarrow$ $y_S = 24{,}2$ mm; S(10,0 mm/24,2 mm)

c) $y_S = 0$ aus Symmetriegründen; $A = (5/6)\cdot\pi\, r^2$; weiter wie a) oder b);

$$x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dM_y = \frac{6}{5\pi r^2}\cdot\int_{\pi/6}^{11\pi/6}\frac{2}{3}r\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}r^2\,d\alpha = \frac{2r}{5\pi}\cdot[\sin\alpha]_{\pi/6}^{11\pi/6} = -\frac{2}{5\pi}\cdot r = -5{,}7\text{ mm};$$

S(–5,7 mm/0 mm)

7.44 Kreis mit dem Radius $r = 4$; $x_S = 0$ aus Symmetriegründen;
$\cos\alpha = 2/4 \Rightarrow \alpha = 60°$; daher ist die Segmentfläche

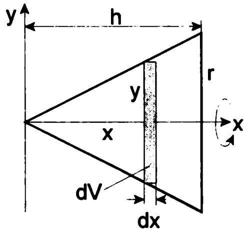


$$A = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2 - \frac{r^2}{4}\cdot\sqrt{3} = 9{,}83;$$

Obere Kreislinie $y = \sqrt{16-x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 12$ oder $x_1 = -2\cdot\sqrt{3}$ sowie $x_2 = 2\cdot\sqrt{3}$; obere Begrenzung durch die Kreislinie, untere Begrenzung durch die Gerade $y = 2$:

$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left[(16-x^2)-2^2\right]dx = \frac{2}{2A}\cdot\int_0^{2\sqrt{3}}\left[(16-x^2)-2^2\right]dx = 2{,}82;\quad S(0/2{,}82)$$

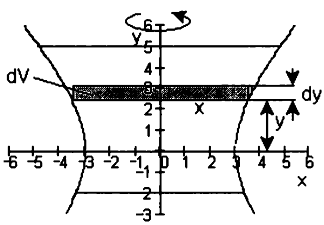
7.45 Siehe Abb.; $y = \frac{r}{h}\cdot x$; $y_S = 0$; $z_S = 0$; $dV = \pi\cdot y^2\cdot dx$; $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$;



$$x_S = \frac{1}{V}\cdot\int_V x\cdot dV = \frac{3}{\pi r^2 h}\cdot\int_0^h x\cdot\pi y^2\,dx = \frac{3}{\pi r^2 h}\cdot\int_0^h x\cdot\pi\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{3}{h^3}\cdot\int_0^h x^3\,dx = \frac{3}{h^3}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{4}\cdot h = 7{,}5\text{ cm};\quad S(7{,}5\text{ cm}/0\text{ cm}/0\text{ cm})$$

7.46 $x^2 = \frac{9}{16}\cdot\left(y^2+16\right)$; $x_S = 0$ und $z_S = 0$ aus Symmetriegründen;

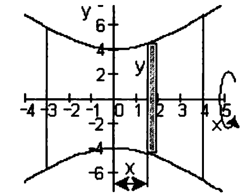


$$V = \pi\int_{-2}^{5} x^2\,dy = \frac{9\pi}{16}\cdot\int_{-2}^{5}\left(y^2+16\right)dy = \frac{1407\cdot\pi}{16} = 87{,}94;$$

$$dV = \pi\cdot x^2\cdot dx = \frac{9\pi}{16}\cdot\left(y^2+16\right)\cdot dy;$$

$$y_S = \frac{1}{V}\cdot\int_{-2}^{5} y\cdot dV = \frac{1}{V}\cdot\frac{9\pi}{16}\cdot\int_{-2}^{5}\left(y^3+16y\right)\cdot dy = 2{,}05;\ S(0/2{,}05/0)$$

7.47 $y^2 = \frac{16}{9}\cdot\left(x^2+9\right)$; $y_S = 0$ und $z_S = 0$ aus Symmetriegründen;

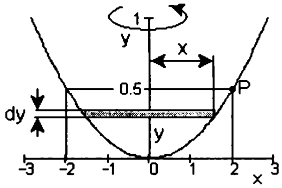


$$V = \pi\int_{-3}^{4} y^2\,dx = \frac{16\pi}{9}\cdot\int_{-3}^{4}\left(x^2+9\right)dx = \frac{4480\cdot\pi}{27} = 521{,}3$$

$$dV = \pi\cdot y^2\cdot dx = \frac{16\cdot\pi}{9}\cdot\left(x^2+9\right)\cdot dx\,;$$

$$x_S = \frac{1}{V}\cdot\int_{-3}^{4} x\cdot dV = \frac{1}{V}\cdot\frac{16\cdot\pi}{9}\cdot\int_{-3}^{4}\left(x^3+9x\right)\cdot dx = \frac{27}{4480\cdot\pi}\cdot\frac{16\cdot\pi}{9}\cdot\left[\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{4} = 0{,}81;\ S(0{,}81/0/0)$$

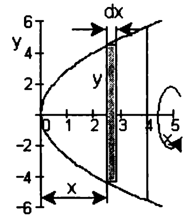
7.48 $2^2 = 8\cdot y \Rightarrow y_1 = 0{,}5$; $y_2 = -0{,}5$; $P(2/0{,}5)$; $x_S = z_S = 0$;



$$V = \pi\cdot\int_0^{1/2} x^2\cdot dy = 8\cdot\pi\cdot\int_0^{1/2} y\cdot dy = \pi;\quad dV = \pi\cdot x^2\cdot dy = 8\pi\cdot y\cdot dy;$$

$$y_S = \frac{1}{V}\cdot\int_0^{1/2} y\cdot dV = \frac{1}{V}\cdot 8\cdot\pi\cdot\int_0^{1/2} y^2\cdot dy = \frac{1}{3};\quad S\left(0/\frac{1}{3}/0\right)$$

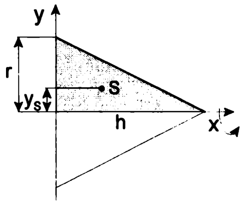
7.49 $y_S = z_S = 0$ aus Symmetriegründen;



$$V = \pi\int_0^4 y^2\,dx = 8\pi\cdot\int_0^4 x\,dx = 64\pi = 201{,}1;\quad dV = \pi\cdot y^2\cdot dx = 8\pi\,x\cdot dx;$$

$$x_S = \frac{1}{V}\cdot\int_0^4 x\cdot dV = \frac{1}{V}\cdot 8\cdot\pi\cdot\int_0^4 x^2\cdot dx = \frac{8}{3};\quad S\left(\frac{8}{3}/0/0\right)$$

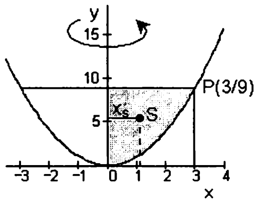
7.50 $A = \frac{h\cdot r}{2}$; Flächenschwerpunkt: Obere Begrenzung $y = -r\cdot x/h + r$;



$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_0^h\left(-\frac{r}{h}\cdot x + r\right)^2 dx = \frac{2}{2\cdot h\cdot r}\cdot\frac{h\cdot r^2}{3} = \frac{h}{3}$$ oder dieses Ergebnis aus Beispiel 7.13, Lehrbuch Seite 252;

$$V = A\cdot 2\cdot\pi\cdot y_S = \frac{h\cdot r}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{r}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h = 2094\,\text{cm}^3 \approx 2{,}1\,\text{dm}^3$$

7.51 a) $f(3) = 3^2 = 9$; obere Begrenzung: $y_1 = 9$; untere Begrenzung: $y_2 = x^2$;



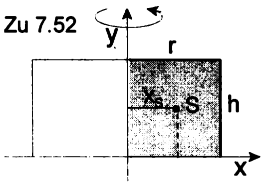
$$A = \int_0^3\left(9-x^2\right)\cdot dx = 18;\quad x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^3 x\cdot\left(y_1-y_2\right)\cdot dx =$$

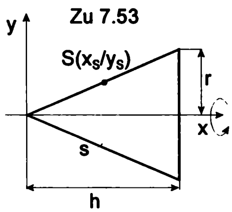
$$= \frac{1}{18}\cdot\int_0^3 x\cdot\left(9-x^2\right)\cdot dx = \frac{9}{8};\quad V = A\cdot 2\cdot\pi\cdot x_S = 18\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{9}{8} = 127{,}2$$

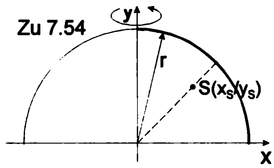
b) $A = \int_0^4 (x+2)dx = 16$; $x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^4 x\cdot y\,dx = \frac{1}{16}\cdot\int_0^4 x\cdot(x+2)\,dx = \frac{7}{3}$; $V = A\cdot 2\pi\cdot x_S = 234{,}6$

c) $A = \int_0^2 e^x\,dx = e^2 - 1 = 6{,}39$; $x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^2 x\cdot y\,dx = \frac{1}{6{,}39}\cdot\int_0^2 x\cdot e^x\,dx = 1{,}31$; $V = A\cdot 2\pi\cdot x_S = 52{,}71$

d) $A = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1$; $x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^{\pi/2} x\cdot y\,dx = \frac{1}{1}\cdot\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\,dx = 1$; $V = A\cdot 2\pi\cdot x_S = 2\pi$







7.52 Siehe Abbildung; $A = r\cdot h$; $x_S = \frac{1}{2}\cdot r$; $V = A\cdot 2\pi\cdot x_S = r\cdot h\cdot 2\pi\cdot \frac{1}{2}\cdot r = \pi\cdot r^2\cdot h$

7.53 Siehe Abbildung; $S(x_S/y_S)$ Linienschwerpunkt, $y_S = r/2$, $M = 2\pi y_S\cdot s = \pi r\cdot s = \pi r\cdot\sqrt{h^2+r^2}$

7.54 Siehe Abbildung; $S(x_S/y_S)$ Linienschwerpunkt; $y_S = x_S$ aus Symmetriegründen; bei der Rotation des Viertelkreisbogens der Länge $\frac{\pi\cdot r}{2}$ um die y–Achse wird eine Halbkugelfläche mit dem Inhalt $A = 2\pi\cdot r^2$ erzeugt: $2\pi\cdot x_S\,\frac{\pi\cdot r}{2} = 2\pi\cdot r^2 \Rightarrow x_S = \frac{2r}{\pi}$

7.55 Berechnung als Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollzylinder mit der Höhe jeweils h; ihre Radien sind r_i bzw. r_a, ihre Massen sind $m_i = \rho\cdot h\pi r_i^2$ bzw. $m_a = \rho\cdot h\pi r_a^2$:

$$I = \frac{1}{2}\cdot m_a\cdot r_a^2 - \frac{1}{2}\cdot m_i\cdot r_i^2 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot h\pi r_a^4 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot h\pi r_i^4 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot h\pi\cdot\left(r_a^4 - r_i^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot h\pi\cdot\left(r_a^2-r_i^2\right)\cdot\left(r_a^2+r_i^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(m_a-m_i\right)\cdot\left(r_a^2+r_i^2\right) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(r_a^2+r_i^2\right),\ m = m_a - m_i$$

Lösungsvariante: $dV = 2\pi r\cdot h\cdot dr$ (siehe Beispiel .19, Lehrbuch Seite 160 unten);

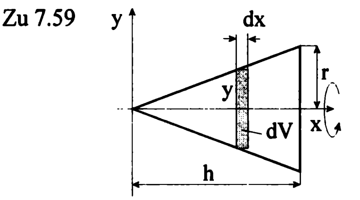
$$I = \rho\cdot\int_{r_i}^{r_a} r^2\cdot 2\pi\cdot r\cdot h\cdot dr = 2\rho\cdot\pi\cdot h\int_{r_i}^{r_a} r^3\,dr = \frac{\rho\cdot\pi\cdot h}{2}\cdot\left(r_a^4-r_i^4\right) = \rho\cdot\pi\cdot h\cdot\left(r_a^2-r_i^2\right)\cdot\frac{r_a^2-r_i^2}{2} = m\cdot\frac{r_a^2-r_i^2}{2}$$

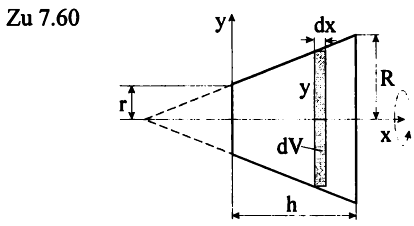
7.56 Berechnung als Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollkugeln; ihre Radien sind r_i bzw. r_a, ihre Massen sind $m_i = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}r_i^3$ bzw. $m_a = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}r_a^3$; $I = \frac{2}{5}\cdot m_a\cdot r_a^2 - \frac{2}{5}\cdot m_i\cdot r_i^2 =$

$$= \frac{2}{5}\cdot\rho\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot r_a^5 - \frac{2}{5}\cdot\rho\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot r_i^5 = \frac{2}{5}\cdot\rho\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\left(r_a^3-r_i^3\right)\cdot\frac{r_a^5-r_i^5}{r_a^3-r_i^3} = \frac{2}{5}\cdot m\cdot\frac{r_a^5-r_i^5}{r_a^3-r_i^3},\ m = m_a - m_i$$

7.57 Satz von Steiner: $I_S = \frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2$; $I = I_S + m\cdot a^2$; $a = R$; $I = \frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2 + m\cdot R^2 = \frac{3}{2}\cdot m\cdot R^2$

7.58 Satz von Steiner: $I_S = \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2$; $I = I_S + m\cdot a^2$; $a = R$; $I = \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2 + m\cdot R^2 = \frac{7}{5}\cdot m\cdot R^2$





7.59 Siehe Abbildung auf voriger Seite; Zerlegung des Kegels in Zylinderscheiben der Höhe dx und dem Radius y als Volumselemente; $dV = \pi \cdot y^2\, dx$; eine solche Zylinderscheibe besitzt die Masse $dm = \rho \cdot dV$ und das Massenträgheitsmoment $dI = \frac{1}{2} y^2\, dm = \frac{1}{2} y^2 \cdot \rho\, dV = \frac{1}{2}\pi \rho\, y^4 dx$; $y = \frac{r}{h} x$;

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^h y^4 dx = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \frac{R^4}{h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} \cdot \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot R^2 = \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2, \text{ m Kegelmasse}$$

7.60 Siehe Abbildung; Vorgangsweise analog wie in Aufgabe 7.59: $dV = \pi \cdot y^2\, dx$; $dI = \frac{1}{2} y^2\, dm =$

$$= \frac{1}{2} y^2 \cdot \rho\, dV = \frac{1}{2}\pi\rho\, y^4 dx;\quad y = r + \frac{R-r}{h} x;\ \text{Kegelstumpfmasse } m = \rho \cdot \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) =$$

$$= \rho \cdot \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r};\quad I = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^h y^4 dx = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h} x\right)^4 dx;\ \text{Subst. } u = r + \frac{R-r}{h} x;\ \frac{du}{dx} = \frac{R-r}{h};$$

$$dx = \frac{h}{R-r} du;\ I = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int_{\dots}^{\dots} u^4 \cdot \frac{h}{R-r} du = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \frac{h}{R-r} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \left(r + \frac{R-r}{h} x\right)^5\right]_0^h = \frac{1}{10}\pi\rho \cdot \frac{h}{R-r} \cdot \left(R^5 - r^5\right) =$$

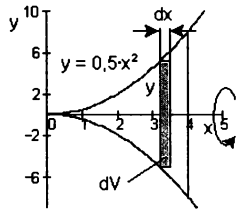
$$= \frac{3}{10}\rho \cdot \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \frac{\left(R^3 - r^3\right)}{R - r} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{3}{10} \cdot m \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Ergebnis auch als Differenz der Massenträgheitsmomente zweier Drehkegel.

7.61 $dV = \pi \cdot y^2 \cdot dx$; $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi \cdot y^2 \cdot dx$; $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$;

$$dI = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot y^4 \cdot dx;$$

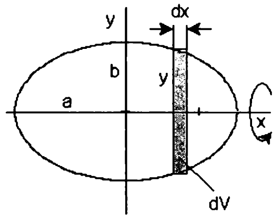
$$I = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \frac{1}{16} \cdot \int_0^4 x^8 dx = \frac{1}{32 \cdot 9} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left[x^9\right]_0^4 = \frac{8192}{9} \cdot \pi \cdot \rho \approx 2860 \cdot \rho$$



7.62 $dV = \pi \cdot y^2 \cdot dx$; $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi \cdot y^2 \cdot dx$; $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(a^2 - x^2\right)$;

$$dI = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot y^4 \cdot dx;$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \frac{b^4}{a^4} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot 2 \cdot \frac{b^4}{a^4} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^2 dx =$$



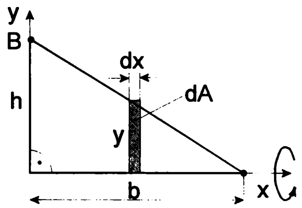
$$= \pi \cdot \rho \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \left[a^4 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x_5\right]_0^a = \frac{8}{15} \cdot a b^4 \pi\rho = \frac{2}{5} \cdot m \cdot b^2 \quad \text{mit } m = \frac{4\pi}{3} \cdot a b^2$$

7.63 a) Obere Begrenzung der Dreiecksfläche: $y = h - \frac{h}{b} \cdot x$;

$$dI_x = \frac{1}{3} \cdot y^3 dx;\ I_b = I_x = \int_0^b \frac{1}{3} \cdot y^3\, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^b \left(h - \frac{h}{b} x\right)^3 dx =$$

$= \frac{b \cdot h^3}{12}$, Integration durch Substitution $u = h - h \cdot x/b$.

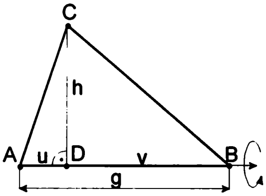
Lösungsvariante: Wie in Beispiel 7.24, Lehrbuch Seite 265



b) Satz von Steiner: $I_S = I_b - A \cdot a^2$; $A = \frac{b \cdot h}{2}$; $a = \frac{h}{3}$; $I_S = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{b \cdot h^3}{36}$

c) S. v. Steiner: Abstand Achse durch B von S: $a = \frac{2}{3} \cdot h$; $I_B = I_S + A \cdot a^2 = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{4}$

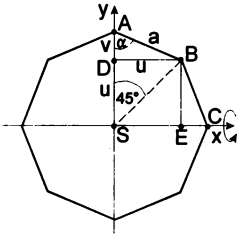
7.64 Trägheitsmoment des Dreiecks ADC: $I_1 = \frac{u \cdot h^3}{3}$;



Trägheitsmoment des Dreiecks DBC: $I_2 = \frac{v \cdot h^3}{3}$;

$$I = I_1 + I_2 = \frac{u \cdot h^3}{3} + \frac{v \cdot h^3}{3} = \frac{(+v) \cdot h^3}{3} = \frac{g \cdot h^3}{3}$$

7.65 Das gesamte Trägheitsmoment ist das Vierfache der Summe der Trägheitsmomente des Trapezes ASEB sowie des Dreiecks ECB bezüglich der x–Achse.



$\alpha = 62{,}5°$; $u = a \cdot \sin\alpha = 0{,}9239 \cdot a$; $v = a \cdot \cos\alpha = 0{,}3827 \cdot a$;
Obere Begrenzung der Trapezfläche:Gerade durch A(0/u+v) und B(u/u), $y_1 = -\frac{v}{u} \cdot x + u + v = -0{,}4142 \cdot x + 1{,}3066 \cdot a$;
Obere Begenzung der Dreiecksfläche: Gerade durch B(u/u) und C(u+v/0), $y_2 = -\frac{u}{v} \cdot x + \frac{u \cdot (u+v)}{v} = -2{,}414 \cdot x + 3{,}154 \cdot a$;

$$I = 4 \cdot \left(\int_0^u \frac{1}{3} \cdot y_1^3\,dx + \int_u^{u+v} \frac{1}{3} \cdot y_2^3\,dx \right) = 4 \cdot \left(0{,}440 \cdot a^4 + 0{,}025 \cdot a^4\right) = 1{,}86 \cdot a^4$$, Integr. durch Substitution.

7.66 $A = \int_0^3 \sqrt{3-x}\,dx = 2 \cdot \sqrt{3}$ (Integration durch Substitution $u = 3 - x$);

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_0^3 x \cdot y\,dx = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_0^3 x \cdot \sqrt{3-x}\,dx$; Substitution $u = \sqrt{3-x}$, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2u}$;

$dx = -2u\,du$; $u = \sqrt{3-x} \Rightarrow x = 3 - u^2$; Grenzen: $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}$, $x = 3 \Rightarrow u = 0$;

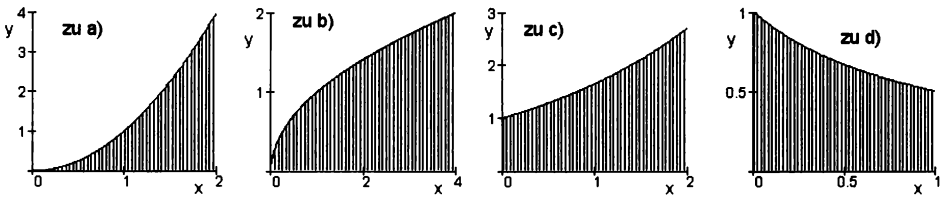
$$x_S = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_{\sqrt{3}}^0 (3 - u^2) \cdot u \cdot (-2u)\,du = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot u^5 - 2u^3\right]_{\sqrt{3}}^0 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[0 - \left(-\frac{12\sqrt{3}}{5}\right)\right] = \frac{6}{5} = 1{,}2;$$

$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_0^3 y^2\,dx = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_0^3 (3 - x)\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0{,}65$; $I_x = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{3}$, $I_y = \frac{144}{35} \cdot \sqrt{3}$ nach Beispiel 7.25;

S. v. Steiner: $I_{Sx} = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 = 0{,}62$; $I_{Sy} = \frac{144}{35} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 2{,}14$

7.67 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $I_x = \int_{-R}^{R} \frac{1}{3} \cdot y^3\,dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{2/3} dx = \frac{\pi}{8} \cdot R^4$

7.68



a) $A = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$; $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_0^2 x \cdot y\,dx = \frac{3}{8} \cdot \int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{2}$; $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_0^2 y^2\,dx = \frac{3}{16} \cdot \int_0^2 x^4 \cdot dx = \frac{6}{5}$;

$I_x = \int_0^2 \frac{1}{3} \cdot y^3 dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^2 x^6 dx = \frac{128}{21} = 6{,}10$; $I_y = \int_0^2 x^2\,y\,dx = \int_0^2 x^4\,dx = \frac{32}{5} = 6{,}40$;

$$I_{Sx} = I_x - A\cdot y_S^2 = \frac{128}{21} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 2{,}26;\quad I_{Sy} = I_y - A\cdot x_S^2 = \frac{32}{5} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0{,}40$$

b) $A = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3};\; x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^4 x\cdot y\,dx = \frac{3}{16}\cdot\int_0^4 x^{3/2}\,dx = \frac{12}{5};\; y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_0^4 y^2\,dx = \frac{3}{32}\cdot\int_0^4 x\cdot dx = \frac{3}{4};$

$$I_x = \int_0^4 \frac{1}{3}\cdot y^3 dx = \frac{1}{3}\cdot\int_0^4 x^{3/2}\,dx = \frac{64}{15} = 4{,}27;\; I_y = \int_0^4 x^2\,y\,dx = \int_0^4 x^{5/2}\,dx = \frac{256}{7} = 36{,}57;$$

$$I_{Sx} = I_x - A\cdot y_S^2 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1{,}27;\; I_{Sy} = I_y - A\cdot x_S^2 = \frac{256}{7} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2 = 5{,}85$$

c) $A = \int_0^2 e^{x/2}\,dx = 3{,}4366;\; x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^2 x\cdot y\,dx = \frac{1}{3{,}4366}\cdot\int_0^2 x\cdot e^{x/2}\,dx = 1{,}1604;$

$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_0^2 y^2\,dx = \frac{1}{2\cdot 3{,}4366}\cdot\int_0^2 e^x\,dx = 0{,}9296;$$

$$I_x = \int_0^2 \frac{1}{3}\cdot y^3 dx = \frac{1}{3}\cdot\int_0^2 e^{3x/2}\,dx = 4{,}24;\; I_y = \int_0^2 x^2\,y\,dx = \int_0^2 x^2\cdot e^{x/2}\,dx = 5{,}75$$

$$I_{Sx} = I_x - A\cdot y_S^2 = 1{,}27;\; I_{Sy} = I_y - A\cdot x_S^2 = 1{,}09$$

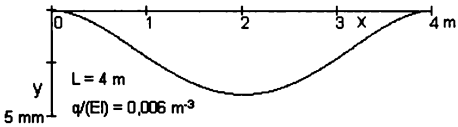
d) $A = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = 0{,}6931;\; x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_0^1 x\cdot y\,dx = \frac{1}{0{,}6931}\cdot\int_0^1 x\cdot e^{x/2}\,dx = 0{,}4427;$

$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_0^1 y^2\,dx = \frac{1}{2\cdot 0{,}6931}\cdot\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = 0{,}3607;$$

$$I_x = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot y^3\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \frac{1}{8};\; I_y = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{x+1} + x - 1\right)dx = 0{,}19;$$

$$I_{Sx} = I_x - A\cdot y_S^2 = 0{,}035;\; I_{Sy} = I_y - A\cdot x_S^2 = 0{,}057$$

7.69 $Q'(x) = -q_0;\; Q(x) = -\int q(x)dx = -q_0\cdot x + C_1;$



$$M_b = \int Q(x)dx = -q_0\cdot\frac{x^2}{2} + C_1\cdot x + C_2;$$

$$y''(x) = -\frac{M_b}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^2}{2} + C_1\cdot x + C_2\right)$$

$$y'(x) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^3}{6} + C_1\cdot\frac{x^2}{2} + C_2\cdot x + C_3\right);\; y'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0;$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^4}{24} + C_1\cdot\frac{x^3}{6} + C_2\cdot\frac{x^2}{2} + C_4\right);\quad y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0;$$

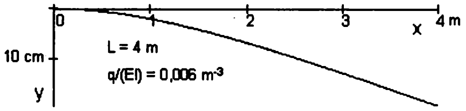
$$y(x) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^4}{24} + C_1\cdot\frac{x^3}{6} + C_2\cdot\frac{x^2}{2}\right);\; y'(x) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^3}{6} + C_1\cdot\frac{x^2}{2} + C_2\cdot x\right);$$

$$y(L) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{L^4}{24} + C_1\cdot\frac{L^3}{6} + C_2\cdot\frac{L^2}{2}\right) = 0,\; y'(L) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{L^3}{6} + C_1\cdot\frac{L^2}{2} + C_2\cdot L\right) = 0 \text{ oder}$$

$$4L\cdot C_1 + 12C_2 = q_0\cdot L^2,\; 3L\cdot C_1 + 6C_2 = q_0\cdot L^2 \Rightarrow C_1 = \frac{q\cdot L}{2},\; C_2 = -\frac{q\cdot L^2}{12};$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI}\left(-q_0\cdot\frac{x^4}{24} + \frac{q\cdot L}{2}\frac{x^3}{6} - \frac{q\cdot L^2}{12}\cdot\frac{x^2}{2}\right) = \frac{q_0}{24EI}\cdot\left(x^4 - 2L\,x^3 + L^2x^2\right)$$

7.70 $Q'(x)=-q_0\,;\; Q(x)=-\int q(x)\,dx=-q_0\cdot x+C_1\,;$



$$M_b(x)=\int Q(x)\,dx=-q_0\cdot\frac{x^2}{2}+C_1\cdot x+C_2;$$

$$Q(0)=q_0\cdot L \;\Rightarrow\; C_1=q_0\cdot L\;;\quad M_b(x)=-q_0\cdot\frac{x^2}{2}+q_0\cdot L\cdot x+C_2;$$

$$M_b(L)=-q_0\cdot\frac{L^2}{2}+q_0\cdot L^2+C_2 \;\Rightarrow\; C_2=-\frac{q_0\cdot L^2}{2};$$

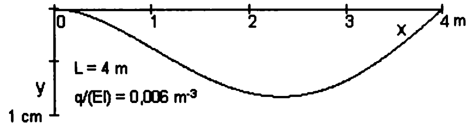
$$M_b(x)=-q_0\cdot\frac{x^2}{2}+q_0\cdot L\cdot x-\frac{q_0}{2}\cdot L^2=q_0\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+L\cdot x-\frac{L^2}{2}\right);$$

$$y''(x)=-\frac{M_b}{EI}=\frac{q_0}{EI}\left(\frac{x^2}{2}-L\cdot x+\frac{L^2}{2}\right);\quad y'(x)=\frac{q_0}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-L\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{L^2}{2}\cdot x+C_3\right);$$

$$y(x)=\frac{q_0}{EI}\left(\frac{x^4}{24}-L\cdot\frac{x^3}{6}+L^2\cdot\frac{x^2}{4}+C_3\cdot x+C_4\right);\; y(0)=0 \Rightarrow C_4=0;\; y'(0)=0 \Rightarrow C_3=0;$$

$$y(x)=\frac{q_0}{EI}\left(\frac{x^4}{24}-L\cdot\frac{x^3}{6}+L^2\cdot\frac{x^2}{4}\right)=\frac{q_0}{24\,EI}\left(x^4-4L\cdot x^3+6L^2\cdot x^2\right)$$

7.71 $Q'(x)=-q_0\,;\; Q(x)=-\int q(x)\,dx=-q_0\cdot x+C_1\,;$



$$M_b(x)=\int Q(x)\,dx=-q_0\cdot\frac{x^2}{2}+C_1\cdot x+C_2$$

$$M_b(L)=0=-q_0\frac{L^2}{2}+C_1L+C_2 \;\Rightarrow\; C_2=\frac{q_0L^2}{2}-C_1L;\; M_b(x)=-q_0\frac{x^2}{2}+C_1\cdot x+\frac{q_0L^2}{2}-C_1L;$$

$$y''(x)=-\frac{M_b}{EI}=\frac{1}{EI}\cdot\left(q_0\frac{x^2}{2}-C_1x-\frac{q_0L^2}{2}+C_1L\right);$$

$$y'(x)=\frac{1}{EI}\cdot\left(q_0\frac{x^3}{6}-C_1\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0\cdot L^2}{2}\cdot x+C_1\cdot L\cdot x+C_3\right);\; y'(0)=0 \Rightarrow C_3=0;$$

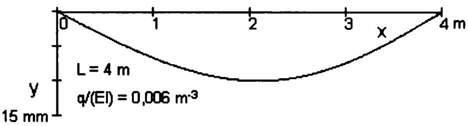
$$y(x)=\frac{1}{EI}\cdot\left(q_0\frac{x^4}{24}-C_1\frac{x^3}{6}-\frac{q_0L^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1L\frac{x^2}{2}+C_4\right);\; y(0)=0 \Rightarrow C_4=0;$$

$$y(x)=\frac{1}{EI}\cdot\left(q_0\frac{x^4}{24}-C_1\frac{x^3}{6}-\frac{q_0L^2}{4}\cdot x^2+C_1L\frac{x^2}{2}\right);$$

$$y(L)=0=\frac{1}{24\cdot EI}\cdot\left(q_0L^4-4C_1L^3-6q_0L^4+12C_1L^3\right):L^3;\quad 0=-5q_0L+8C_1 \;\Rightarrow\; C_1=\frac{5q_0L}{8};$$

$$y(x)=\frac{1}{24\cdot EI}\left(q_0\cdot x^4-\frac{5q_0\cdot L}{2}x^3+\frac{3q_0L^2}{2}x^2\right)=\frac{q_0}{48\cdot EI}\cdot\left(2x^4-5Lx^3+3L^2x^2\right)$$

7.72 a) $y''(x) = -\dfrac{M_b}{EI} = \dfrac{q_0}{6EI} \cdot \left(\dfrac{q_0}{L} \cdot x^3 - q_0 L \cdot x\right);$



$y'(x) = \dfrac{q_0}{6 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{q_0}{L} \cdot \dfrac{x^4}{4} - q_0 L \cdot \dfrac{x^2}{2} + C_1\right);$

$y(x) = \dfrac{q_0}{6 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{q_0}{L} \cdot \dfrac{x^5}{20} - q_0 L \cdot \dfrac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2\right)$; $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$

$y(L) = 0 = \dfrac{q_0}{6EI} \cdot \left(q_0 \cdot \dfrac{L^4}{20} - q_0 \cdot \dfrac{L^4}{6} + C_1 \cdot L\right)$ oder $\dfrac{q_0 L^3}{20} - \dfrac{q_0 L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{7 q_0 L^3}{60};$

$y(x) = \dfrac{q_0}{6 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{x^5}{20L} \cdot - \dfrac{L}{6} \cdot x^3 + \dfrac{7L^3}{60} \cdot x\right) = \dfrac{q_0}{360 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{3}{L} \cdot x^5 - 10L \cdot x^3 + 7L^3 \cdot x\right)$

b) $Q(x) = -\dfrac{q_0}{L} \cdot \dfrac{x^2}{2} + C_1$; $M_b(x) = -\dfrac{q_0}{6L} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$; $M_b(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$;

$M_b(L) = 0 = -\dfrac{q_0}{6} L^2 + C_1 \cdot L \Rightarrow C_1 = \dfrac{q_0 L}{6}$; $M_b(x) = -\dfrac{q_0}{6L} \cdot x^3 + \dfrac{q_0 L}{6} \cdot x = -\dfrac{q_0}{6} \cdot \left(\dfrac{x^3}{L} - L \cdot x\right);$

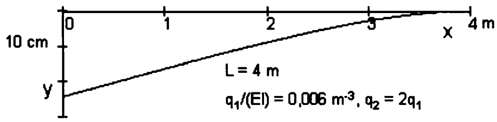
$y''(x) = -\dfrac{M_b}{EI} = \dfrac{q_0}{6 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{x^3}{L} - L \cdot x\right)$; $y'(x) = \dfrac{q_0}{6 \cdot EI} \cdot \left(\dfrac{x^4}{4L} - L \cdot \dfrac{x^2}{2} + C_3\right);$

$y(x) = \dfrac{q_0}{6EI} \cdot \left(\dfrac{x^5}{20L} - L \cdot \dfrac{x^3}{6} + C_3 \cdot x + C_4\right)$; $y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0;$

$y(L) = 0 = \dfrac{q_0}{6EI} \cdot \left(\dfrac{L^4}{20} - \dfrac{L^4}{6} + C_3 \cdot L\right) \Rightarrow C_3 = \dfrac{7}{60} L^3;$

$y(x) = \dfrac{q_0}{6EI} \cdot \left(\dfrac{x^5}{20L} - \dfrac{L}{6} \cdot x^3 + \dfrac{7L^3}{60} \cdot x\right) = \dfrac{q_0}{360\,EI} \cdot \left(\dfrac{3}{L} \cdot x^5 - 10L \cdot x^3 + 7L^3 \cdot x\right)$

7.73 $q(x) = (q_2 - q_1) \cdot \dfrac{x}{L} + q_1;$



$Q(x) = -(q_2 - q_1) \cdot \dfrac{x^2}{2L} - q_1 \cdot x + C_1;$

$Q(x) = 0 \Rightarrow C_1 = 0;$

$M_b(x) = -\dfrac{q_2 - q_1}{6L} \cdot x^3 - \dfrac{q_1}{2} \cdot x^2 + C_2$; $M_b(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$

$M_b(x) = -\dfrac{q_2 - q_1}{6L} \cdot x^3 - \dfrac{q_1}{2} \cdot x^2$; $y'' = -\dfrac{M_b(x)}{EI} = \dfrac{1}{EI} \cdot \left(\dfrac{q_2 - q_1}{6L} \cdot x^3 + \dfrac{q_1}{2} \cdot x^2\right);$

$y' = \dfrac{1}{EI} \cdot \left(\dfrac{q_2 - q_1}{24L} \cdot x^4 + \dfrac{q_1}{6} \cdot x^3\right) + C_3$; $y'(L) = 0 \Rightarrow C_3 = -\dfrac{L^3}{24 \cdot EI} \cdot (3q_1 + q_2);$

$y'(x) = \dfrac{1}{EI} \cdot \left(\dfrac{q_2 - q_1}{24L} \cdot x^4 + \dfrac{q_1}{6} \cdot x^3 - \dfrac{L^3}{24} \cdot (3q_1 + q_2)\right);$

$y(x) = \dfrac{1}{EI} \cdot \left(\dfrac{q_2 - q_1}{120L} \cdot x^5 + \dfrac{q_1}{24} \cdot x^4 - \dfrac{L^3}{24} \cdot (3q_1 + q_2) \cdot x + C_4\right);$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = \dfrac{L^4}{120 \cdot EI} \cdot (11q_1 + 4q_2);$

$y(x) = \dfrac{1}{EI} \cdot \left(\dfrac{q_2 - q_1}{120L} \cdot x^5 + \dfrac{q_1}{24} \cdot x^4 - \dfrac{3q_1 + q_2}{24} L^3 \cdot x + \dfrac{11q_1 + 4q_2}{120} L^4\right)$

7.74 a) $\overline{i} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T i(t)\,dt = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\hat{i}\,dt + \int_{T/2}^{T}(-\hat{i})\,dt\right] = \frac{1}{T}\cdot\left[\hat{i}\cdot\frac{T}{2} - \hat{i}\cdot\frac{T}{2}\right] = 0$, wie anschaulich sofort ersichtlich;

$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \hat{i}\,dt = \frac{1}{T}\cdot\hat{i}\cdot T = \hat{i}$, wie ebenso anschaulich sofort ersichtlich;

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\hat{i}^2 dt + \int_{T/2}^{T}\left(-\hat{i}\right)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T}\cdot\int_0^T dt} = \hat{i}$$

b) $i_1 = \hat{i}$; $i_2 = -\frac{\hat{i}}{2}$; $\overline{i} = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\hat{i}\,dt - \int_{T/2}^{T}\frac{\hat{i}}{2}dt\right] = \frac{1}{4}\cdot\hat{i}$; $\overline{|i|} = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\hat{i}\,dt + \int_{T/2}^{T}\frac{\hat{i}}{2}dt\right] = \frac{3}{4}\cdot\hat{i}$;

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\hat{i}^2 dt + \int_{T/2}^{T}\left(-\frac{\hat{i}}{2}\right)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}dt + \frac{1}{4}\cdot\int_{T/2}^{T}dt\right]} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T}\cdot\frac{5}{8}\cdot T} = \hat{i}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}$$

c) $i_1 = \hat{i}$; $i_2 = -\hat{i}$; $\overline{i} = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/3}\hat{i}\,dt - \int_{T/3}^{T}\hat{i}\,dt\right] = \frac{\hat{i}}{T}\cdot\left[\left(\frac{T}{3}-0\right) - \left(T - \frac{T}{3}\right)\right] = -\frac{1}{3}\cdot\hat{i}$;

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/3}\hat{i}\,dt + \int_{T/3}^{T}\hat{i}\,dt\right] = \frac{\hat{i}}{T}\cdot\left[\left(\frac{T}{3}-0\right) + \left(T - \frac{T}{3}\right)\right] = \hat{i};$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/3}\hat{i}^2 dt + \int_{T/3}^{T}\left(-\hat{i}\right)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T}\cdot\int_0^T dt} = \hat{i}$$

7.75 Rechnung mit T = 2 ms (Periodenwert ist ohne Bedeutung für das Ergebnis).

a) $u(t) = \frac{\hat{u}}{2}\cdot t$; $\overline{u} = \overline{|u|} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \frac{\hat{u}}{2}\cdot t\,dt = \frac{\hat{u}}{4}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{\hat{u}}{2}$;

$$U = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\int_0^2\left(\frac{\hat{u}}{2}\cdot t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{8}\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

b) $u(t) = \hat{u}\cdot t$ für $0 \le t < 1$; $u(t) = 2\hat{u} - \hat{u}\cdot t$ für $1 \le t < 2$;

$$\overline{u} = \overline{|u|} = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^1 \hat{u}\cdot t\,dt + \int_1^2 (2\hat{u} - \hat{u}\cdot t)dt\right] = \frac{\hat{u}}{2};$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^1(\hat{u}\cdot t)^2 dt + \int_1^2(2\hat{u} - \hat{u}\cdot t)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\hat{u}^2\int_0^1 t^2 dt + \hat{u}^2\int_1^2(2 - t^2)dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\hat{u}^2}{3} + \frac{\hat{u}^2}{3}\right]} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

c) $u(t) = \frac{3\hat{u}}{5}\cdot t$ für $0 \le t < 5/3$; $u(t) = 6\hat{u} - 3\hat{u}\cdot t$ für $5/3 \le t < 2$;

$$\overline{u} = \overline{|u|} = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{5/3}\frac{3\hat{u}}{5}t\,dt + \int_{5/3}^{2}(6\hat{u} - 3\hat{u}\cdot t)dt\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{5}{6}\cdot\hat{u} + \frac{1}{6}\cdot\hat{u}\right] = \frac{\hat{u}}{2};$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^{5/3}\left(\frac{3\hat{u}}{5}\cdot t\right)^2 dt + \int_{5/3}^{2}(6\hat{u} - 3\hat{u}\cdot t)^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{3\hat{u}}{5}\right)^2\cdot\int_0^{5/3}t^2 dt + (3\hat{u})^2\cdot\int_{5/3}^{2}(2-t)^2 dt\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{5\hat{u}^2}{9} + \frac{\hat{u}^2}{9}\right]} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

7.76 a) $u(t)=\frac{4\hat{u}}{T}\cdot t$ für $0\le t\le T/4$; $u(t)=0$ für $T/4<t\le T$;

$$\overline{u}=\overline{|u|}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^{T/4}\frac{4\hat{u}}{T}\cdot t\,dt=\frac{\hat{u}}{8};$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^{T/4}\left(\frac{4\hat{u}}{T}\cdot t\right)^2dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{4\hat{u}}{T}\right)^2\cdot\int_0^{T/4}t^2dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{4\hat{u}}{T}\right)^2\cdot\frac{T^3}{192}}=\frac{\hat{u}}{\sqrt{12}}$$

b) $u(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega t)$ für $0\le t\le T/2$; $u(t)=0$ für $T/2<t\le T$; $\omega=2\pi/T$;

$$\overline{u}=\overline{|u|}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^{T/2}\hat{u}\cdot\sin(\omega t)\,dt=\frac{1}{T}\cdot\hat{u}\cdot\left[-\frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]_0^{T/2}=\frac{1}{T}\cdot\hat{u}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot[-\cos\pi+1]=\frac{\hat{u}}{\pi};$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^{T/2}\hat{u}^2\cdot\sin^2(\omega t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\hat{u}^2\int_0^{T/2}\sin^2(\omega\cdot t)\,dt};\quad \int\sin^2(\omega t)\,dt=\int\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\int 1\,dt-\int\cos(2\omega t)\,dt\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{2\omega}\cdot\sin(2\omega t)\right)+C=\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{T}{4\pi}\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\right)+C;$$

$$\int_0^{T/2}\sin^2(\omega t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot\left[t-\frac{T}{4\pi}\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot t\right)\right]_0^{T/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{2}=\frac{T}{4};\quad U=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\hat{u}^2\cdot\frac{T}{4}}=\frac{\hat{u}}{2}$$

7.77 Rechnung unter Weglassung der Einheiten

a) $u(t)=5$ für $0\le t<1$; $u(t)=-2$ für $1\le t<3$; $T=3$;

$$\overline{u}=\frac{1}{3}\cdot\left[\int_0^1 5\,dt+\int_1^3(-2)\,dt\right]=\frac{1}{3}\,V;$$

$$\overline{|u|}=\frac{1}{3}\cdot\left[\int_0^1 5\,dt+\int_1^3|-2|\,dt\right]=3\ V;\quad U=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left[\int_0^1 5^2dt+\int_1^3(-2)^2dt\right]}=\sqrt{11}\approx 3{,}32\ V$$

b) $u(t)=2\cdot(t-1)$ für $0\le t<3$; $u(t)=4$ für $3\le t<4$; $T=4$;

$$\overline{u}=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\int_0^3(t-1)\,dt+4\cdot\int_3^4 dt\right)=\frac{7}{4}\ V;$$

$$\overline{|u|}=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\int_0^3|t-1|\,dt+4\cdot\int_3^4 dt\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\int_0^1(1-t)\,dt+2\cdot\int_1^3(t-1)\,dt+4\cdot\int_3^4 dt\right)=\frac{9}{4}\,V;$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left[\int_0^3(2\cdot(t-1))^2dt+\int_3^4 4^2dt\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot[12+16]}=\sqrt{7}\approx 2{,}65\ V$$

7.78 Rechnung unter Weglassung der Einheiten

a) $u(t) = t$ für $0 \le t < 4$; $u(t) = 8 - t$ für $4 \le t < 12$; $u(t) = t - 16$ für $12 \le t < 20$; $T = 16$;

$$\overline{u} = \frac{1}{16} \cdot \left[\int_0^4 t\,dt + \int_4^{12} (8-t)\,dt + \int_{12}^{16} (t-16)\,dt \right] = 0 \text{ V};$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{16} \cdot \left[\int_0^4 |t|\,dt + \int_4^{12} |8-t|\,dt + \int_{12}^{15} |t-16|\,dt \right] = \frac{1}{16} \cdot \left[\int_0^4 t\,dt + \int_4^{8} (8-t)\,dt + \int_8^{12} (t-8)\,dt + \int_{12}^{15} (16-t)\,dt \right] = 2 \text{ V}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \left[\int_0^4 t^2\,dt + \int_4^{12} (8-t)^2\,dt + \int_{12}^{16} (t-16)^2\,dt \right]} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

b) $u(t) = 25 \cdot \sin(\omega t) = 25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{20} \cdot t\right) = 25 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$; $T = 10$ (die Periode für die Sinuslinie zwischen $t = 0$ und $t = 10$ hat jedoch den Wert 20);

$\overline{u} = \overline{|u|} = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} 25 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right) dt$; Substitution $\alpha = \omega \cdot t = \frac{\pi}{10} \cdot t$, $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow dt = \frac{10}{\pi} \cdot d\alpha$;

Grenzen: $t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{10} \cdot 0 = 0$; $t = 10 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{10} \cdot 10 = \pi$.

$$\int_0^{10} \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right) dt = \int_0^{\pi} \sin\alpha \cdot \frac{10}{\pi} dt = \frac{10}{\pi} \cdot [-\cos\alpha]_0^{\pi} = \frac{10}{\pi} \cdot [-\cos\pi + \cos 0] = \frac{20}{\pi};$$

$$\overline{u} = \overline{|u|} = \frac{1}{10} \cdot 25 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot 25 = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u} = 15{,}9 \text{ V};$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} \left(25 \cdot \sin\left(\frac{10}{\pi} \cdot t\right)\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{25^2}{10} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\alpha \cdot \frac{10}{\pi}\,d\alpha} = \sqrt{\frac{25^2}{10} \cdot \frac{10}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\alpha\,d\alpha};$$

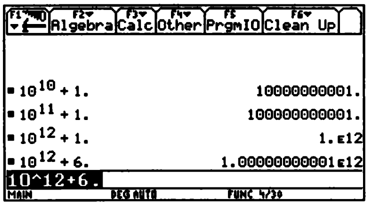
$$\int_0^{\pi} \sin^2\alpha\,d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha))\,d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

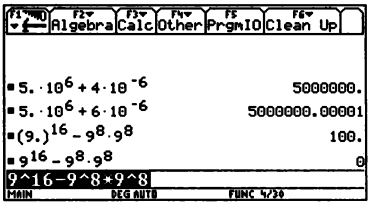
$$U = \sqrt{\frac{25^2}{10} \cdot \frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{25}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 17{,}7 \text{ V}$$

8 Grundprobleme der numerischen Mathematik

8.1 Nein, wenn die Frage allgemein gestellt ist. Ein Computer kann nur Zahlen, die mit "seinen" Maschinenzahlen zusammenfallen, exakt darstellen. Dies sind nur *endlich* viele Zahlen. Die übrigen Zahlen, und das sind unendlich viele Zahlen, können nicht exakt dargestellt werden.

8.2 Hier ist wesentlich, dass der Rechner numerisch und nicht, wenn das möglich ist, symbolisch rechnet. Übliche Taschenrechner wie auch Excel rechnen numerisch. Mit dem Voyage 200 (oder dem TI 89) kann auch symbolisch gerechnet werden. In letzterem Fall muss bei diesen und den folgenden Aufgaben sichergestellt werden, dass der Rechner numerisch arbeitet. Dies erfolgt etwa dadurch, dass mindestens eine der eingegebenen Zahlen als Kommazahl eingegeben wird.





Voyage 200 bei Einstellung im Mode Menü: *Display Digits* auf FLOAT:

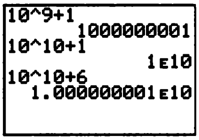
B2 ▾ fx =10^15+1

	A	B
1	$10^{14}+1=$	100000000000001
2	$10^{15}+1=$	1000000000000000

B2 ▾ fx =10^15+6

	A	B
1	$10^{15}+4=$	1000000000000000
2	$10^{15}+6=$	1000000000000010
3	$5*10^{6}+6*10^{-6}$	5000000

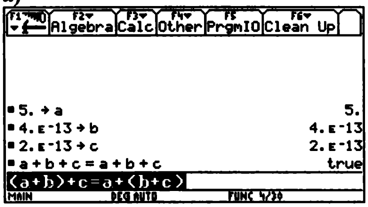
TI–83/84:



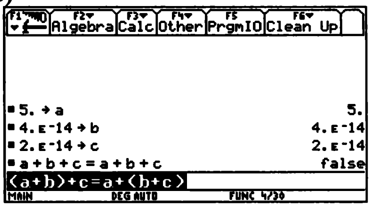
Mathcad: $10^{15}+1 = 1000000000000001$

$10^{16}+1 = 10000000000000000$ $10^{16}+9 = 10000000000000008$

8.3 a)



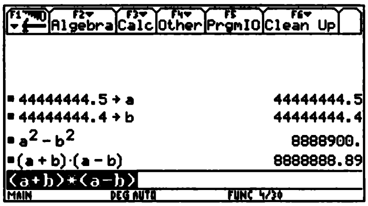
b)



Voyage 200 bei Einstellung auf FLOAT:

8.4 $x = 123{,}50$: $1000 \cdot (x - 123{,}44) = 60$;
$x = 123{,}54$: $1000 \cdot (x - 123{,}44) = 100$. Das Ergebnis liegt zwischen 60 und 100.

8.5

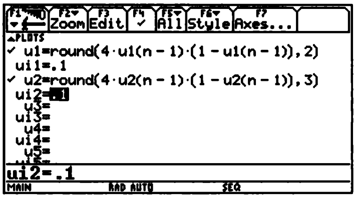


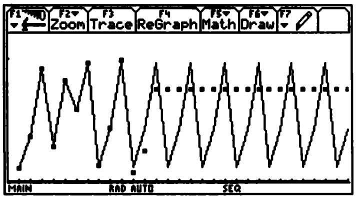
Statt $a^2 - b^2$ den gleichwertigen Term $(a+b)\cdot(a-b)$ verwenden!

8.6

n	a)	b)	c)	d) = e)	f)
1	0,10	0,100	0,1000	0,10000	0,100000
2	0,36	0,360	0,3600	0,36000	0,360000
3	0,92	0,922	0,9216	0,92160	0,921600
4	0,29	0,288	0,2890	0,28901	0,289014
5	0,82	0,820	0,8219	0,82193	0,821940
6	0,59	0,590	0,5855	0,58544	0,585419
7	0,97	0,968	0,9708	0,97080	0,970814
8	0,12	0,124	0,1134	0,11339	0,113337
9	0,42	0,434	0,4022	0,40213	0,401967
10	0,97	0,983	0,9617	0,96169	0,961558
11	0,12	0,067	0,1473	0,14737	0,147857
12	0,42	0,250	0,5024	0,50261	0,503981
13	0,97	0,750	1,0000	0,99997	0,999937
14	0,12	0,750	0,0000	0,00012	0,000252
15	0,42	0,750	0,0000	0,00048	0,001008
16	0,97	0,750	0,0000	0,00192	0,004028
17	0,12	0,750	0,0000	0,00767	0,016047
18	0,42	0,750	0,0000	0,03044	0,063158
19	0,97	0,750	0,0000	0,11805	0,236676
20	0,12	0,750	0,0000	0,41646	0,722642
21	0,42	0,750	0,0000	0,97208	0,801722
22	0,97	0,750	0,0000	0,10856	0,635855
23	0,12	0,750	0,0000	0,38710	0,926174
24	0,42	0,750	0,0000	0,94901	0,273503
25	0,97	0,750	0,0000	0,19356	0,794796
26	0,12	0,750	0,0000	0,62438	0,652381
27	0,42	0,750	0,0000	0,93812	0,907120
28	0,97	0,750	0,0000	0,23220	0,337013
29	0,12	0,750	0,0000	0,71313	0,893741
30	0,42	0,750	0,0000	0,81830	0,379872

Beispielsweise wird graphisch das Ergebnis für eine Rundung auf 2 sowie auf 3 Nachkommastellen, also für a) und b) gezeigt. Die beiden Graphen sind unterschiedlich dargestellt: als Anzeigestil ist *Line* bzw. *Square* gewählt.





8.7 a) $\dfrac{1}{99+70\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{99-70\cdot\sqrt{2}}{\left(99+70\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(99-70\cdot\sqrt{2}\right)}=\dfrac{99-70\cdot\sqrt{2}}{1}=99-70\cdot\sqrt{2}$

b) Mit $\sqrt{2}$ gerechnet ist das Ergebnis: 0,00505063...;

$99-70\cdot 1{,}414\ =0{,}02$; relativer Fehler: $\dfrac{0{,}02-\left(99-70\cdot\sqrt{2}\right)}{99-70\cdot\sqrt{2}}=2{,}96\%$

$\dfrac{1}{99+70\cdot 1{,}414}=0{,}00505010\ldots$; relativer Fehler: $\dfrac{0{,}005505010\ldots-\frac{1}{99+70\cdot\sqrt{2}}}{\frac{1}{99+70\cdot\sqrt{2}}}=0{,}0076\%$

8.8 a) $1-\cos x=1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$

Winkelmaß: RAD;

Voyage 200: 1–cos 0,001 = 0,000 000 499 999 96; $2\cdot\sin^2\frac{0{,}001}{2}$ = 0,000 000 499 999 958 333

Mathcad: $1-\cos(0.001)=4.99999958325503\times 10^{-7}$ $\quad 2\cdot\sin\left(\frac{0.001}{2}\right)^2=4.99999958333335\times 10^{-7}$

Excel:

B1	f_x =1-COS(A1)
A	B
0,001	0,000000499999958325

B1	f_x =2*SIN(A1/2)^2
A	B
0,001	0,000000499999958333

.

Der Term $2\cdot\sin^2\frac{0{,}001}{2}$ ist rechentechnisch vorzuziehen, da keine keine Subtraktion auftritt

b) $x-\sqrt{x^2-1}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

$\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^3=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-3}=-3\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$;

Voyage 200: $\ln\left(1111{,}1-\sqrt{1111{,}1^2-1}\right)^3=-23{,}118\,758\,259\,09$;

$-3\cdot\ln\left(1111{,}1+\sqrt{1111{,}1^2-1}\right)=-23{,}118\,758\,317\,937$;

Der Term $-3\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ist rechentechnisch vorzuziehen, da keine Subtraktion auftritt

8.9 $h_{un}=s\cdot\tan\alpha_{un}=100\cdot\tan 17°=30{,}57$ m; $h_{ob}=s\cdot\tan\alpha_{ob}=100\cdot\tan 19°=34{,}43°$;
$\Delta h_{max}=\frac{1}{2}\cdot(h_{ob}-h_{un})=1{,}9$ m; $h_0=\frac{1}{2}\cdot(h_{un}+h_{ob})=32{,}5$; $h=(32{,}5\pm 1{,}9)$ m

8.10 a) $\Delta z_{max}=|\Delta x|+|\Delta y|=0{,}1+0{,}2=0{,}3$; $z=60\pm 0{,}3$
b) $\Delta z_{max}=2\cdot|\Delta x|+|\Delta y|=2\cdot 0{,}1+0{,}2=0{,}4$; $z=70\pm 0{,}4$
c) $\Delta z_{max}=|\Delta x|+|\Delta y|=0{,}3$; $z=40\pm 0{,}3$
d) $\Delta z_{max}=3\cdot|\Delta x|+|\Delta y|=0{,}5$; $z=20\pm 0{,}5$
e) $\Delta z_{max}=2\cdot(2\cdot|\Delta x|+|\Delta y|)=0{,}8$; $z=60\pm 0{,}8$

8.11 $\frac{|\Delta x|}{x_0}=0{,}01=1\%$; $\frac{|\Delta y|}{y_0}=0{,}004=0{,}4\%$;
a) $\Delta z_{max}/z_0=0{,}01+0{,}004=0{,}014$; $z_0=500$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}014=7$; $z=500\pm 7$
b) $\Delta z_{max}/z_0=0{,}01+0{,}004=0{,}014$; $z_0=5000$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}014=70$; $z=5000\pm 70$
c) $\Delta z_{max}/z_0=0{,}01+2\cdot 0{,}004=0{,}018$; $z_0=50000$; $\Delta z_{max}=50000\cdot 0{,}018=900$; $z=50000\pm 900$
d) $\Delta z_{max}/z_0=3\cdot 0{,}01+0{,}004=0{,}034$; $z_0=200000$; $\Delta z_{max}=z_0\,0{,}034=6800$; $z=200000\pm 6800$
e) $\Delta z_{max}/z_0=0{,}01+0{,}004=0{,}014$; $z_0=0{,}2$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}014=0{,}0028$; $z=0{,}2000\pm 0{,}0028$
f) $\Delta z_{max}/z_0=2\cdot 0{,}01+0{,}004=0{,}024$; $z_0=2$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}024=0{,}048$; $z=2{,}000\pm 0{,}048$
g) $\Delta z_{max}/z_0=0{,}01$; $z_0=0{,}3$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}01=0{,}003$; $z=0{,}300\pm 0{,}003$
h) $\Delta z_{max}/z_0=2\cdot 0{,}004=0{,}008$; $z_0=4\cdot 10^{-5}$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}008=3{,}2\cdot 10^{-7}$; $z=4\cdot 10^{-5}\pm 3{,}2\cdot 10^{-7}$
i) $\Delta z_{max}/z_0=2\cdot 0{,}01+2\cdot 0{,}004=0{,}028$; $z_0=0{,}04$; $\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}028=0{,}00112\approx 0{,}0011$;
$z=0{,}0400\pm 0{,}0011$
j) $\frac{\Delta z_{max}}{z_0}=\frac{\Delta(x+y)_{max}}{x_0+y_0}+\frac{|\Delta y|}{y_0}=\frac{0{,}1+0{,}2}{60}+\frac{0{,}2}{50}=0{,}009$; $z_0=1{,}2$;
$\Delta z_{max}=z_0\cdot 0{,}009=0{,}0108\approx 0{,}011$; $z=1{,}200\pm 0{,}011$

8.12 Siehe Lehrbuch, Seite 284 unten

a) $\frac{\Delta\rho_{max}}{\rho_0}=\frac{|\Delta m|}{m_0}+\frac{|\Delta V|}{V_0}$

b) $\frac{\Delta E_{kin\,max}}{E_{kin\,0}}=\frac{|\Delta m|}{m_0}+2\cdot\frac{|\Delta v|}{v_0}$

c) $\frac{\Delta m_{max}}{m_0}=\frac{|\Delta\rho|}{\rho_0}+2\cdot\frac{|\Delta a|}{a_0}+\frac{|\Delta b|}{b_0}$

d) $\frac{\Delta\rho_{max}}{\rho_0}=\frac{|\Delta R|}{R_0}+\frac{|\Delta A|}{A_0}+\frac{|\Delta l|}{l_0}$

e) $\frac{\Delta\rho_{max}}{\rho_0}=\frac{|\Delta m|}{m_0}+2\cdot\frac{|\Delta d|}{d_0}+\frac{|\Delta h|}{h_0}$

f) $\frac{\Delta g}{g_0}=\frac{|\Delta l|}{l_0}+2\cdot\frac{|\Delta T|}{T_0}$

8.13 a) $U = U_1 - U_2$; $U_0 = 23{,}0 - 18{,}5 = 4{,}5$ V; $\Delta U_{max} = |\Delta U_1| + |\Delta U_2| = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$ V;

$\frac{\Delta U_1}{U_{10}} = \frac{0{,}05}{23{,}0} = 0{,}217\%$; $\frac{\Delta U_2}{U_{20}} = \frac{0{,}05}{18{,}5} = 0{,}270\%$; $U = (4{,}5 \pm 0{,}1)$ V;

$\frac{\Delta U_{max}}{U_0} = \frac{0{,}1}{4{,}5} = 2{,}22\%$ (etwa zehnmal so hoch wie die relativen Messunsicherheiten der Spannungen U_1 bzw. U_2)

b) $U_{ob} = U_{1ob} - U_{2un} = 23{,}05 - 18{,}45 = 4{,}6$; $U_{un} = U_{1un} - U_{2ob} = 22{,}95 - 18{,}55 = 4{,}4$;

$\Delta U_{max} = \frac{1}{2}\cdot(U_{ob} - U_{un}) = 0{,}1$ V; $U_0 = \frac{1}{2}\cdot(U_{ob} + U_{un}) = 4{,}5$ V usw. wie oben

8.14 **a)** $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; $\Delta A_{max}/A_0 = |\Delta a|/a_0 + |\Delta a|/a_0 = 2\cdot|\Delta a|/a_0 = 2\cdot 0{,}5/38 = 2{,}63\%$ (die Faktoren $\frac{1}{4}$ und $\sqrt{3}$ haben natürlich keine Messunsicherheit);

b) $A_{ob} = \frac{38{,}5^2}{4}\sqrt{3} = 641{,}83\ \text{mm}^2$, $A_{un} = \frac{37{,}5^2}{4}\sqrt{3} = 608{,}92\ \text{mm}^2$;

$\Delta A_{max} = (A_{ob} - A_{un})/2 = 16{,}45\ \text{mm}^2$; Intervallmitte $A_0 = (A_{ob} + A_{un})/2 = 625{,}38\ \text{mm}^2$;

$\Delta A_{max}/A_0 = 2{,}63\%$

8.15 **a)** $A = \frac{\pi}{4}d^2$; $\Delta A_{max}/A_0 = 2\cdot|\Delta d|/d_0 = 2\cdot 0{,}01/0{,}83 \approx 2{,}41\%$

b) $A_{ob} = \frac{\pi}{4}\,0{,}84^2 = 0{,}5542\ \text{mm}^2$, $A_{un} = \frac{\pi}{4}\,0{,}82^2 = 0{,}5281\ \text{mm}^2$; $\Delta A_{max} = (A_{ob} - A_{un})/2 = 0{,}0130\ \text{mm}^2$;

Intervallmitte $A_0 = (A_{ob} + A_{un})/2 = 0{,}5411\ \text{mm}^2$; $\Delta A_{max}/A_0 = 2{,}41\%$

8.16 a) $V = \frac{\pi}{6}d^3$; $V_0 = 33{,}510\ \text{cm}^3$; $\Delta V_{max}/V_0 = 3\cdot|\Delta d|/d_0 = 3\cdot 2/40 = 15\%$;

$\Delta V_{max} = V_0\cdot 0{,}15 \approx 5{,}0\ \text{cm}^3$; $V = (33{,}5 \pm 5{,}0)\ \text{cm}^3$

b) $V_{ob} = \frac{\pi}{6}\,42^3 = 38{,}792\ \text{cm}^3$, $V_{un} = \frac{\pi}{6}\,38^3 = 28{,}730\ \text{cm}^3$; $\Delta V_{max} = (V_{ob} - V_{un})/2 \approx 5{,}0\ \text{cm}^3$;

Intervallmitte $V_0 = (V_{ob} + V_{un})/2 = 33{,}761\ \text{cm}^3 \approx 33{,}8\ \text{cm}^3$ (gerundet auf die Genauigkeit von ΔV_{max}); $V = (33{,}8 \pm 5{,}0)\ \text{cm}^3$; $\Delta V_{max}/V_0 \approx 15\%$

8.17 a) $V = abc$; $V_0 = 7118{,}43\ \text{cm}^3$; $\Delta V_{max}/V_0 = |\Delta a|/a_0 + |\Delta b|/b_0 + |\Delta c|/c_0 = 0{,}0158$;

$\Delta V_{max} = V_0\cdot 0{,}0158 = 112{,}66\ \text{cm}^3 \approx 0{,}11\ \text{dm}^3$; $V = (7{,}12 \pm 0{,}11)\ \text{dm}^3$

b) $V_{ob} = 24{,}3\cdot 18{,}6\cdot 16{,}0 = 7231{,}68\ \text{cm}^3$, $V_{un} = 24{,}1\cdot 18{,}4\cdot 15{,}8 = 7006{,}35\ \text{cm}^3$;

$\Delta V_{max} = (V_{ob} - V_{un})/2 \approx 0{,}11\ \text{dm}^3$; Intervallmitte $V_0 = (V_{ob} + V_{un})/2 = 7119{,}02\ \text{dm}^3$ (gerundet auf die Genauigkeit von ΔV_{max}); $V = (7{,}12 \pm 0{,}11)\ \text{dm}^3$

8.18 $V = abc$; $\Delta V_{max}/V_0 = |\Delta a|/a_0 + |\Delta b|/b_0 + |\Delta c|/c_0 = 0{,}03$; nimmt man die gleiche relative Messunsicherheit bei den drei Kanten an, also $|\Delta a|/a_0 = |\Delta b|/b_0 = |\Delta c|/c_0$, so muss jede Kante mit einer relativen Messunsicherheit von höchstens 1% gemessen werden

8.19 $\Delta V_{max}/V_0 = 2\cdot|\Delta d|/d_0 + |\Delta h|/h_0$; nimmt man gleiche relative Messunsicherheiten für d und h an, so ist $|\Delta d|/d_0 = 0{,}02/3$ und $|\Delta h|/h_0 = 0{,}02/3$. Daraus: $|\Delta d| = 15\cdot 0{,}02/3 \approx 0{,}1$ cm und $|\Delta h| = 28\ 0{,}02/3 = 0{,}187\ \text{cm} \approx 0{,}2$ cm.

8.20 a) $P = U \cdot I$; $P_0 = 224 \cdot 85{,}2 = 19084{,}8$ W; $\Delta P_{max}/P_0 = |\Delta U|/U_0 + |\Delta I|/I_0 = 3/224 + 0{,}2/85{,}2 =$
$= 0{,}0157$; $\Delta P_{max} = P_0 \cdot 0{,}0157 = 300{,}4 \approx 0{,}30$ kW; $P = (19{,}08 \pm 0{,}30)$ kW
b) $P_{ob} = 19385{,}8$ W, $P_{un} = 18785$ W; $\Delta P_{max} = (P_{ob} - P_{un})/2 = 300{,}4$ W $\approx 0{,}30$ kW
$P_0 = (P_{ob} + P_{un})/2 = 19085{,}4$ W; $P = (19{,}09 \pm 0{,}30)$ kW

8.21 $I = U/R$ mit $R = R_1 + R_2 + R_3$; $R_0 = 1350\ \Omega$; $I_0 = U_0/R_0 = 230/1350 = 0{,}1704$ A;
$\Delta R_{max} = \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 = 4 + 10 + 1 = 15\ \Omega$;
$\Delta I_{max}/I_0 = |\Delta U|/U_0 + |\Delta R|/R_0 = 3/230 + 15/1350 = 0{,}0242$; $\Delta I_{max} = I_0 \cdot 0{,}0242 = 0{,}0041$ A;
$I = (170{,}4 \pm 4{,}1)$ mA;
Methode der Wertschranken: $R_{ob} = 1365\,\Omega$; $R_{un} = 1335\,\Omega$; $U_{ob} = 233\,V$; $U_{un} = 227\,V$;
$I_{ob} = 0{,}017453\,A = 174{,}53\,mA$; $I_{un} = 0{,}01663\,A = 166{,}30\,mA$; $\Delta I_{max} = \dfrac{174{,}53 - 166{,}30}{2} = 4{,}1\,mA$;
Intervallmitte: $I_0 = \dfrac{174{,}53 + 166{,}30}{2} = 170{,}4\,mA$; $I = (170{,}4 \pm 4{,}1)$ mA

8.22 $v = s/t$; $\Delta v_{max}/v_0 = |\Delta s|/s_0 + |\Delta t|/t_0 = 2\% + 3\,\% = 5\%$

8.23 $E = \dfrac{4F}{\pi\, d^2} \cdot \dfrac{l}{\Delta l}$; $\Delta E_{max}/E_0 = |\Delta F|/F_0 + 2 \cdot |\Delta d|/d_0 + |\Delta l|/l_0 + |\Delta(\Delta l)|/(\Delta l)_0 =$
$= 4/100 + 2 \cdot 0{,}01/0{,}82 + 3/3022 + 0{,}1/2{,}7 = 0{,}1024 \approx 10\%$;
$E_0 = 211940$ N/mm^2; $\Delta E_{max} = E_0\ 0{,}1024 \approx 22$ kN/mm^2; $E = (212 \pm 22)$ kN/mm^2

8.24 a) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $b_{ob} = \sqrt{240{,}2^2 - 172{,}2^2\,m^2}$; $b_{un} = \sqrt{239{,}8^2 - 172{,}6^2\,m^2}$;
$\Delta b_{max} = (b_{ob} - b_{un})/2 \approx 0{,}49$ m
b) $\cos\beta = a/c$ oder $\beta = \arccos a/c$; $\beta_{ob} = \arccos(172{,}2/240{,}2) = 44{,}201°$;
$\beta_{un} = \arccos(172{,}6/239{,}8) = 43{,}965°$; $\Delta\beta_{max} = (\beta_{ob} - \beta_{un})/2 \approx 0{,}12°$

8.25 $R = \dfrac{1}{1/R_1 + 1/R_2}$; R ist maximal, wenn der Nenner minimal ist und umgekehrt;
$R_{ob} = \dfrac{1}{1/403 + 1/102}\,\Omega$; $R_{un} = \dfrac{1}{1/397 + 1/98}\,\Omega$; $\Delta R_{max} = (R_{ob} - R_{un})/2 = 1{,}4\ \Omega$;
$R_o = (R_{ob} + R_{un})/2 = 79{,}998\ \Omega \approx 80{,}0$; $R = (80{,}0 \pm 1{,}4)\ \Omega$

8.26 a) $\dfrac{e^x}{e^y}$ b) $\ln\dfrac{x}{y}$

8.27 $\sqrt{x^2+4} - 2 = \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{1} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+4} + 2}{\sqrt{x^2+4} + 2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4} + 2}$

8.28 $x = -9999$, $y = 10002$.
Bei Änderung von "0,9999" in "1" besitzt das Gleichungssystem keine Lösung; denn es kann nicht zugleich $x + y = 3$ und $x + y = 1{,}9998$ gelten. Das Gleichungssystem ist schlecht konditioniert.

9 Einige numerische Verfahren

9.1 Es wird im Folgenden jeweils eine Möglichkeit gezeigt, wie vorgegangen werden kann. x^* bezeichnet die Lösung.

a)

x	x^3+x-1
0	–1
1	1
0,5	–0,375
0,7	0,043
0,65	–0,075

x^* liegt also zwischen 0,65 und 0,7; $x^* \approx$ **0,7**

b)

x	x^3-3x-3
0	–3
2	–1
3	15
2,1	–0,039
2,15	0,48

x^* liegt also zwischen 2,1 und 2,15; $x^* \approx$ **2,1**

c)

x	x^4-3x^2-1
0	–1
1	–3
2	3
1,5	–2,69
1,7	–1,32
1,8	–0,22
1,85	0,45

x^* liegt also zwischen 1,8 und 1,85; $x^* \approx$ **1,8**

d)

x	$x+\ln x-2$
1	–1
2	0,69
1,5	–0,095
1,6	0,070
1,55	–0,012

x^* liegt also zwischen 1,55 und 1,6; $x^* \approx$ **1,6**

e)

x	$x-e^{-x}$
0	–1
1	0,63
0,5	–0,11
0,6	0,051
0,55	–0,027

x^* liegt also zwischen 0,55 und 0,6; $x^* \approx$ **0,6**

f)

x	$x-1-\sin x$ (x in rad)
0	–1
1	–0,84
2	0,091
1,8	–0,17
1,9	–0,046
1,95	0,021

x^* liegt also zwischen 1,9 und 1,95; $x^* \approx$ **1,9**

9.2 Je nach Startwert x_0 (grau hinterlegt) ergeben sich unterschiedliche Folgen $x_1, x_2, x_3, \ldots$. x^* bezeichnet die Lösung.

a) $2x + \ln x = 1 \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}\cdot(1-\ln x) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	0,5000
1	0,5000	0,8466
2	0,8466	0,5833
3	0,5833	0,7695
usw.		

$x^* = 0{,}687$

b) $x = \cos(x) = \varphi(x)$, x in rad

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,8776
1	0,8776	0,6390
2	0,6390	0,8027
3	0,8027	0,6948
usw.		

$x^* = 0{,}739$

c) $x^3 - 2\cdot x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$

$x^3 = 2x^2 - x - 2$ oder

$x = \sqrt[3]{2x^2 - x - 2)} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	1,4422
1	1,4422	1,6772
2	1,6772	1,8119
3	1,8119	1,8903
usw.		

$x^* = 2{,}000$

d) $1-x = \sin x \Rightarrow$

$x = 1-\sin(x) = \varphi(x)$,

x in rad

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,5206
1	0,5206	0,5026
2	0,5026	0,5183
3	0,5183	0,5046
usw.		

$x^* = 0{,}511$

e) $x\cdot\ln x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\ln x = 2/x$ oder

$x = e^{2/x} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	7,3891
1	7,3891	1,3108
2	1,3108	4,5985
3	4,5985	1,5448
usw.	1,5448	3,6496

$x^* = 2{,}346$

f) $x^2 - \sqrt{x} = 4 \Rightarrow$

$x^2 = 4 + \sqrt{x}$ oder

$x = \sqrt{4+\sqrt{x}} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	2,2361
1	2,2361	2,4459
2	2,4459	2,2652
3	2,2652	2,4179
usw.		

$x^* = 2{,}352$

9.2 g) $x^3 + x - 1 = 0 \Rightarrow$
$x^3 = 1 - x$ oder
$x = \sqrt[3]{1-x} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,7937
1	0,7937	0,6155
2	0,6155	0,7426
3	0,7426	0,6488
usw.		

$x^* =$ **0,682**

h) $x^2 + \ln x = 2 \Rightarrow$
$x^2 = 2 - \ln x$ oder
$x = \sqrt{2 - \ln x} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	1,4142
1	1,4142	1,2859
2	1,2859	1,3223
3	1,3223	1,3117
usw.		

$x^* =$ **1,314**

i) $e^{-x} = \frac{x}{3} - 0{,}8 \Rightarrow$
$x = 3 \cdot \left(e^{-x} + 0{,}8\right) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	3,5036
1	3,5036	2,4903
2	2,4903	2,6487
3	2,6487	2,6122
usw.		

$x^* =$ **2,619**

j) $\sinh x - 2x = 5 \Rightarrow$
$x = \operatorname{ar\,sinh}(2x + 5) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	2,6441
1	2,6441	3,0265
2	3,0265	3,0979
3	3,0979	3,1107
usw.		

$x^* =$ **3,113**

k) $2^{-x} - \sin(x/3) = 3 \Rightarrow$
$2^{-x} = 3 + \sin(x/2)$ oder
$x = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\left(3 + \sin\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	1,0000	-1,7988
1	-1,7988	-1,1486
2	-1,1486	-1,2967
3	-1,2967	-1,2607
usw.		

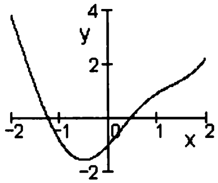
$x^* =$ **-1,268**

l) $x^2 + \ln(2x) = 0 \Rightarrow$
$\ln(2x) = -x^2$ oder
$x = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,3894
1	0,3894	0,4297
2	0,4297	0,4157
3	0,4157	0,4206
usw.		

$x^* =$ **0,419**

9.3 a) Graphische Ermittlung der Startwerte: $y = \sin(2x) - 1 + x^2$



2 Lösungen;
Startwerte $x_0 = -1$ bzw. 0,5

$\sin(2x) = 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$
$x^2 = 1 - \sin(2x)$ oder
$x = -\sqrt{1 - \sin(2x)} = \varphi(x)$ ...
Minus vor Wurzel, um eine negative Lösung zu erhalten!
x in rad.

n	x_n	$\varphi(x)$
0	-1,0000	-1,3818
1	-1,3818	-1,1701
2	-1,1701	-1,3109
3	-1,3109	-1,2234
usw.		

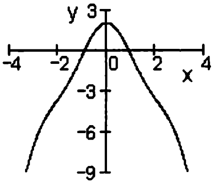
$x_1^* =$ **−1,26**

$\sin(2x) = 1 - x^2 \Rightarrow$
$x = 0{,}5 \cdot \arcsin(1 - x^2) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,4240
1	0,4240	0,4809
2	0,4809	0,4384
3	0,4384	0,4702
usw.		

$x_2^* =$ **0,46**

b) Graphische Ermittlung der Startwerte: $y = \cos(2x) + 1 - x^2$



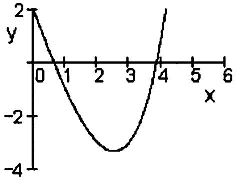
2 Lösungen: Da die Funktion symmetrisch ist, liegen die Lösungen gegengleich auf der x–Achse; Startwert für die positive Lösung: $x_0 = 0{,}9$

$\cos(2x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1) \Rightarrow$
$x - 1 = \frac{\cos(2x)}{x+1}$ oder $x = \frac{\cos(2x)}{x+1} + 1 = \varphi(x)$.

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,9000	0,8804
1	0,8804	0,8995
2	0,8995	0,8809
3	0,8809	0,8991
usw.		

$x_1^* =$ **0,89** (die Anzahl der nötigen Näherungsschritte hängt stark davon ab, wie nahe der Startwert bei x^* liegt.
Negative Lösung: $x_2^* =$ **−0,89**

9.3 c) Graphische Ermittlung der Startwerte: $y = 2^x + 1 - 4x$



2 Lösungen; Startwerte 0,5 bzw. 4

$2^x = 4x - 1 \Rightarrow$

$x = 0{,}25\cdot(2^x + 1) = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	0,5000	0,6036
1	0,6036	0,6299
2	0,6299	0,6369
3	0,6369	0,6387

$x_1^* =$ **0,64**

$2^x = 4x - 1 \Rightarrow$

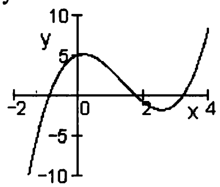
$x = \frac{\ln(4x-1)}{\ln 2} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	4,0000	3,9069
1	3,9069	3,8706
2	3,8706	3,8562
3	3,8562	3,8505

$x_2^* =$ **3,85**

9.4 Da die Polynome vom Grad drei sind, genügt die numerische Ermittlung einer Lösung x*. Durch Abspaltung des Faktors x – x* erhält man eine quadratische Funktion. Die zugehörige quadratische Gleichung kann wie üblich gelöst werden.

a) Graphische Ermittlung eines Startwertes einer Lösung von $y = x^3 - 4x^2 + x + 5$



Startwert für die größte Lösung: $x_0 = 3{,}2$

$x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow$

$x = 4x^2 - x - 5$ oder

oder $x = \sqrt[3]{4x^2 - x - 5} = \varphi(x)$ ...

n	x_n	$\varphi(x)$
0	3,2000	3,1997
1	3,1997	3,1995
2	3,1995	3,1994
3	3,1994	3,1992
usw.		

$x_1^* = 3{,}199$

Polynomdivision:

$(x^3 - 4x^2 + x + 5) : (x - 3{,}199) =$

$x^2 - 0{,}801\cdot x - 1{,}562 + \frac{0{,}002}{x - 3{,}199} \approx$

$\approx x^2 - 0{,}801\cdot x - 1{,}562;$

$x^2 - 0{,}801\cdot x - 1{,}562 = 0 \Rightarrow$

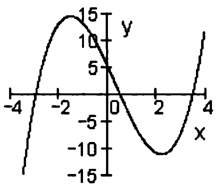
$x_2^* = -0{,}912;\ x_3^* = 1{,}713.$

Rundung der Nullstellen auf 2 Nachkommastellen:

$x^3 - 4x^2 + x + 5 =$

$= (x-3{,}20)\cdot(x-1{,}17)\cdot(x+0{,}91)$

b) Graphische Ermittlung eines Startwertes einer Lösung von $y = x^3 - x^2 - 10x + 5$



Startwert für die größte Lösung: $x_0 = 3{,}5$

$x^3 - x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow$

$x^3 = x^2 + 10x - 5$ oder

$x = \sqrt[3]{x^2 + 10x + 5} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	3,5000	3,4829
1	3,4829	3,4749
2	3,4749	3,4712
3	3,4712	3,4694
usw.		

$x_1^* = 3{,}468$

Polynomdivision:

$(x^3 - x^2 - 10\,x + 5) : (x - 3{,}468) =$

$x^2 + 2{,}468\cdot x - 1{,}441 + \frac{0{,}003}{x - 3{,}468} \approx$

$\approx x^2 + 2{,}468\cdot x - 1{,}441;$

$x^2 + 2{,}468\cdot x - 1{,}441 = 0 \Rightarrow$

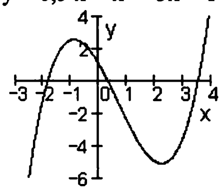
$x_2^* = -2{,}956;\ x_3^* = 0{,}488.$

Rundung der Nullstellen auf 2 Nachkommastellen:

$x^3 - x^2 - 10\,x + 5 =$

$= (x-3{,}47)\cdot(x+2{,}96)\cdot(x-0{,}49)\cdot$

c) Graphische Ermittlung eines Startwertes einer Lösung von $y = 0{,}5\cdot x^3 - x^2 - 3x + 1$



Startwert für die größte Lösung: $x_0 = 3{,}5$

$0{,}5\cdot x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$x^3 = 2x^2 + 6x - 2$ oder

$x = \sqrt[3]{2x^2 + 6x - 2} = \varphi(x)$

n	x_n	$\varphi(x)$
0	3,5000	3,5169
1	3,5169	3,5260
2	3,5260	3,5309
3	3,5309	3,5336
usw.		

$x_1^* = 3{,}537$

Polynomdivision:

$0{,}5\cdot x^3 - x^2 - 3x + 1 =$

$0{,}5\cdot(x^3 - 2x^2 - 6x + 2)$

$(x^3 - 2x^2 - 6\,x + 2) : (x - 3{,}537) =$

$x^2 + 1{,}537\cdot x - 0{,}564 + \frac{0{,}006}{x - 3{,}537} \approx$

$\approx x^2 + 1{,}537\cdot x - 0{,}564;$

$x^2 + 1{,}537\cdot x - 0{,}564 = 0 \Rightarrow$

$x_2^* = -1{,}843;\ x_3^* = 0{,}306.$

Rundung der Nullstellen auf 2 Nachkommastellen:

$0{,}5\cdot(x^3 - 2x^2 - 6x + 2) =$

$= 0{,}5\cdot(x-3{,}54).(x+1{,}84).(x-0{,}31).$

9.5 Der Startwert (grau hinterlegt) kann graphisch ermittelt werden. Die Lösung ist fett gedruckt.

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1,5	-0,8750	5,7500	-1,3478
1	-1,35	-0,1007	4,4499	-1,3252
2	-1,33	-0,0021	4,2685	-1,3247
3	**-1,32**	0,0000	4,2646	-1,3247

b) $f(x) = x^3 - 3x - 3$; $f'(x) = 3x^2 - 3$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-1,0000	9,0000	2,1111
1	2,11	0,0754	10,3704	2,1038
2	2,10	0,0003	10,2784	2,1038
3	**2,10**	0,0000	10,2780	2,1038

c) $f'(x) = 3x^2 + 2{,}16 \cdot x + 0{,}98$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1	0,1000	1,8200	-1,0549
1	-1,05	-0,0060	2,0400	-1,0520
2	**-1,05**	0,0000	2,0279	-1,0520

d) $f'(x) = \frac{1}{15} + 2x \cdot e^{-x^2}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1,5	-0,0054	0,3829	1,5141
1	1,51	-0,0001	0,3726	1,5143
2	**1,51**	0,0000	0,3724	1,5143

e) $f(x) = x^2 - 2 + \ln(x/2)$; $f'(x) = 2x + 1/x$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1,5	-0,0377	3,6667	1,5103
1	1,51	0,0001	3,6827	1,5103
2	**1,51**	0,0000	3,6826	1,5103

f) $f'(x) = 2x + 4 \cdot \sin(2x)$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0,5	-0,8306	4,3659	0,6902
1	0,690	0,0981	5,3083	0,6718
2	0,672	0,0006	5,2407	0,6716
3	**0,672**	0,0000	5,2402	0,6716

g) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x} - 1$; $f'(x) = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-0,6	-0,3440	-2,8425	-0,7210
1	-0,721	0,0692	-4,0349	-0,7039
2	-0,704	0,0016	-3,8476	-0,7035
3	**-0,703**	0,0000	-3,8431	-0,7035

h) $f(x) = 2^x + x - 2$; $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0,5	-0,0858	1,9803	0,5433
1	0,543	0,0006	2,0101	0,5430
2	**0,543**	0,0000	2,0099	0,5430

i) $f(x) = \frac{\lg x}{x} + \sqrt{x+1} - 2$;

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \cdot \ln 10} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-0,1174	0,3220	2,3647
1	2,36	-0,0076	0,2834	2,3916
2	**2,39**	0,0000	0,2812	2,3917

j) $f(x) = 2x - \tan(x)$; $f'(x) = 2 - 1/\cos^2(x)$

x in rad

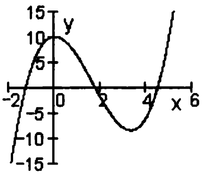
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	1	0,4426	-1,4255	1,3105
1	1,31	-1,1333	-13,0946	1,2239
2	1,22	-0,3185	-6,6529	1,1761
3	1,18	-0,0482	-4,7615	1,1659
4	1,17	-0,0016	-4,4451	1,1656
5	**1,17**	0,0000	-4,4341	1,1656

k) $f(\alpha) = \tan\alpha - 0{,}25 - 0{,}5 \cdot \sin\alpha$;
$f'(\alpha) = 1/\cos^2(\alpha) - 0{,}25 \cdot \cos\alpha$, α in rad

$\alpha = 0{,}430$ rad $= 24{,}6°$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0,5	0,0566	0,8597	0,4342
1	0,434	0,0034	0,7614	0,4298
2	**0,430**	0,0000	0,7555	0,4298

9.6 a)



Startwerte:
–1,5; 2; 4,5;

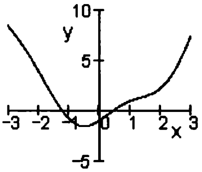
$f'(x) = 2x^2 - 10x$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1,5	-4,6250	21,7500	-1,2874
1	-1,287	-0,4199	17,8454	-1,2638
2	-1,264	-0,0049	17,4300	-1,2635
3	**-1,264**	0,0000	17,4251	-1,2635

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-2,0000	-8,0000	1,7500
1	1,750	0,0469	-8,3125	1,7556
2	**1,756**	0,0000	-8,3096	1,7556

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	4,5	-0,1250	15,7500	4,5079
1	4,508	0,0005	15,8851	4,5079
2	**4,508**	0,0000	15,8845	4,5079

9.6 b)

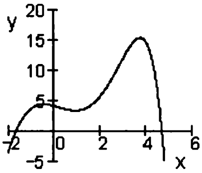


Startwerte:
$-1{,}5$; $0{,}5$;
$f(x) = \sin(2x) - 1 + x^2$;
$f'(x) = 2\cdot\cos(2x) + 2x$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1,5	1,1089	-4,9800	-1,2773
1	-1,277	0,0778	-4,2200	-1,2589
2	-1,259	0,0007	-4,1411	-1,2587
3	**-1,259**	0,0000	-4,1404	-1,2587

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0,5	0,0915	2,0806	0,4560
1	0,456	-0,0013	2,1363	0,4566
2	**0,457**	0,0000	2,1356	0,4566

c)



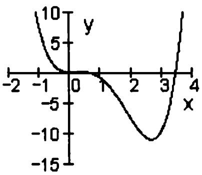
Startwerte: $-1{,}5$; 5

$f(x) = x^3 + 5 - e^x$;
$f'(x) = 3x^2 - e^x$

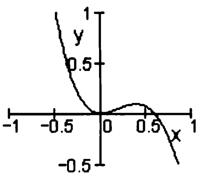
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1,5	1,4019	6,5269	-1,7148
1	-1,715	-0,2223	8,6415	-1,6891
2	-1,689	-0,0034	8,3741	-1,6886
3	**-1,689**	0,0000	8,3698	-1,6886

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	5	-18,4132	-73,4132	4,7492
1	4,749	-3,3734	-47,8258	4,6786
2	4,679	-0,2101	-41,9554	4,6736
3	4,674	-0,0010	-41,5582	4,6736
4	**4,674**	0,0000	-41,5563	4,6736

9.7 a) $y' = 4x^3 - 12x^2 + 4x$; $y'' = 12x^2 - 24x + 4$;
$y''' = 24x - 24$;
Nullstellen : $y = x^2\cdot(x^2 - 4x + 2) = 0$; Produkt–Null–Satz: $x^2 = 0$ sowie $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}59$; $x_3 = 3{,}41$;
Extrema/Wendepunkte:
$y' = 4x\cdot(x^2 - 3x + 1) = 0$; Produkt–Null–Satz:
$x = 0$ sowie $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$



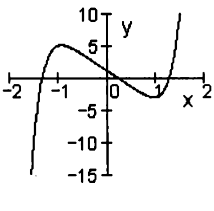
Verlauf für $-1 \le x \le 1$



$x_4 = 0$; $x_5 = 0{,}38$; $x_6 = 2{,}62$; $y''(0) \neq 0 \Rightarrow T_1(0/0)$; $y''(0{,}38) < 0 \Rightarrow H(0{,}38/0{,}09)$;
$y''(2{,}62) > 0 \Rightarrow T_2(2{,}62/-11{,}09)$; $y'' = 0 \Rightarrow x_7 = 0{,}18$; $x_8 = 1{,}82$;
$y'''(0{,}18) \neq 0 \Rightarrow W_1\,(0{,}18/0{,}044)$; $y'''(1{,}82) \neq 0 \Rightarrow W_2(1{,}82/-6{,}49)$

b) $y' = 7x^6 - 5$; $y'' = 42x^6$; $y''' = 252\cdot x^5$;

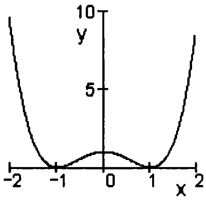
Nullstellen: $y = 0$; Startwerte für das Newton–Verfahren: $-1{,}5$; $0{,}5$ und $1{,}2 \Rightarrow x_1 = -1{,}34$; $x_2 = 0{,}20$; $x_3 = 1{,}27$



Extrema/Wendepunkte:
$y' = 0 \Rightarrow x_4 = \sqrt[6]{5/7} = 0{,}95$; $x_5 = -\sqrt[6]{5/7} = -0{,}95$;

$y''(0{,}95) < 0 \Rightarrow T(0{,}95/-3{,}05)$; $y''(-0{,}95) < 0 \Rightarrow H(-0{,}95/5{,}05)$;
$y'' = 0 \Rightarrow x_6 = 0$; $y'(x)$ wechselt an der Stelle $x_6 = 0$ das Vorzeichen (Lehrbuch Seite 149 unten) $\Rightarrow W(0/1)$

c) Gerade Funktion; $y' = 4x^3 - 4x$; $y'' = 12x^2 - 4$; $y''' = 24x$;
Nullstellen: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; Substitution $u = x^2$; $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow$
$u_1 = u_2 = 1$; $x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$;



Extrema/Wendepunkte:
$y' = 4x\cdot(x^2 - 1) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x = 0$, $x^2 - 1 = 0$, d.h.
$x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = -1$;
$y''(0) < 0 \Rightarrow H(0/1)$; $y''(1) > 0 \Rightarrow T_1(1/0)$; $T_2(-1/0)$;
$y'' = 0 \Rightarrow x_6 = \sqrt{1/3} = 0{,}58$; $x_7 = -0{,}58$;
$y'''(0{,}58) \neq 0 \Rightarrow W_1(0{,}58 / 0{,}44)$; $W_2(-0{,}58 / 0{,}44)$

9.8 $f(x) = x^3 - a$; $f'(x) = 3x^2$; $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - a}{3 \cdot x_n^2} = \dfrac{3x_n^3 - (x_n^3 - a)}{3 \cdot x_n^2} = \dfrac{2}{3} \cdot x_n + \dfrac{a}{3 \cdot x_n^2}$

9.9 a) $1000 \cdot q \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = 3217$; $1000q^4 - 1000 \cdot q = 3217 \cdot q - 3217$ oder $1000 \cdot q^4 - 4217 \cdot q + 3217 = 0$;

$f(q) = 1000 \cdot q^4 - 4217 \cdot q + 3217$; $f'(q) = 4000 \cdot q^3 - 4217$; die Verzinsung liegt wohl über 1% bis (kaum) 10%; daher ein Startwert etwa $q_0 = 1{,}03$;

n	q_n	$f(q_n)$	$f'(q_n)$	$q_n - f(q_n)/f'(q_n)$
0	1,03	-1,0012	153,91	1,0365
1	1,0365	0,2705	237,25	1,0354
2	1,0354	0,0084	222,56	1,0353
3	**1,0353**	0,0000	222,08	1,0353

; Verzinsung also 3,53%

b) $1000 \cdot q \cdot \dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 5801$; $1000 \cdot q^6 - 1000 \cdot q = 5801 \cdot q - 5801$;

$f(q) = 1000 \cdot q^6 - 6801 \cdot q + 5801 = 0 \Rightarrow q = 1 + p = 1{,}0499$; Verzinsung: 4,99%

c) $1000 \cdot q \cdot \dfrac{q^7 - 1}{q - 1} = 9083$; $f(q) = 1000 \cdot q^8 - 10083 \cdot q + 9083 = 0 \Rightarrow q = 1{,}0652$, d.h. 6,52%

9.10 a) $q = 1{,}04$; $K_0 = 2500$; $n = 3 \Rightarrow K_3 = 2500 \cdot q \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = 8116{,}16$ ... Spareinlage nach 3 Jahren

b) $8116{,}16 = 2000 \cdot q \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$; daraus: $f(q) = 2000 \cdot q^4 - 10116{,}16 \cdot q + 8116{,}16 = 0 \Rightarrow q = 1{,}1589$; Zinssatz 15,89%

9.11 Werte in Mio; Barwert Angebot A: $10 + 2 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^6}$; Barwert Angebot B: $4 \cdot q \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^6}$;

$10 + 2 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^6} = 4 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^5} \Rightarrow 10 \cdot q^6 \cdot (q - 1) + 2 \cdot (q^6 - 1) - 4 \cdot q \cdot (q^6 - 1) = 0$ oder weiter vereinfacht: $3q^7 - 4q^3 + 2q - 1 = 0$; mit beispielsweise $q_0 = 1{,}1$ ergibt sich mit Hilfe des Newton–Verfahrens: $q = 1{,}1362$; Zinssatz daher: 13,62%.

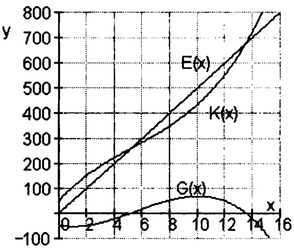
9.12 Gewinn G(x) = Erlös E(x) - Kosten K(x)

a) $E(x) = 50 \cdot x$;

$G(x) = 50x - \left(\dfrac{1}{3} \cdot x^3 - \dfrac{11}{2} \cdot x^2 + 60x + 50\right) = 0$ oder

$f(x) = 6 \cdot G(x) = 2x^3 - 33 \cdot x^2 + 60x + 300 = 0 \Rightarrow$

Gewinngrenzen $x_1 = 5{,}2$ ME; $x_2 = 13{,}4$ ME

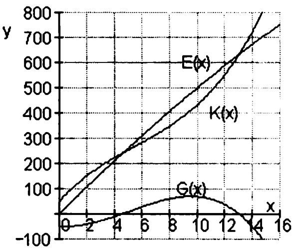


b) $E(x) = p(x) \cdot x$;

$G(x) = \left(55 - \dfrac{x}{2}\right) \cdot x - \left(\dfrac{1}{3} \cdot x^3 - \dfrac{11}{2} \cdot x^2 + 60x + 50\right) = 0$;

$f(x) = 3 \cdot G(x) = x^3 - 15 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 150 = 0 \Rightarrow$

Gewinngrenzen: $x_1 = 4{,}6$ ME; $x_2 = 12{,}9$ ME



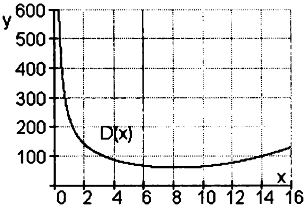
9.13 a) $D(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 14x + 90 + \frac{145}{x}$;

$D'(x) = 2x - 14 - \frac{145}{x^2} = 0$ oder

$f(x) = 2x^3 - 14x^2 - 145 = 0 \Rightarrow x = 8{,}1$;

$D''(x) = 2 + \frac{290}{x^3}$; $D''(8{,}1) > 0 \Rightarrow 8{,}1$ ist

Minimumstelle; Betriebsoptimum somit bei ca. 8 Stück

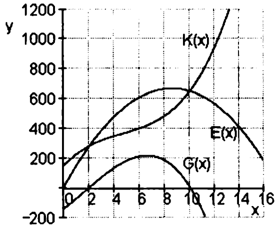


b) $E(x) = p(x) \cdot p$;

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 5x^2 + 65x - 145 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 2{,}0$; $x_2 = 10{,}4$;

Gewinngrenzen bei ca. 2 und 10 Stück



9.14 Barwert A: $10\,000 \cdot \frac{q^6 - 1}{q^6 \cdot (q-1)} - 30\,000$; Barwert B: $15000 \cdot \frac{q^6 - 1}{q^6 \cdot (q-1)} - 52000$;

$10\,000 \cdot \frac{q^6 - 1}{q^6 \cdot (q-1)} - 30\,000 = 15000 \cdot \frac{q^6 - 1}{q^6 \cdot (q-1)} - 52000$; daraus nach Umformung:

$f(q) = 22 \cdot q^7 - 27 \cdot q^6 + 5 = 0 \Rightarrow q = 1{,}0965$; d.h. gleichwertig beim Kalkulationszinsatz 9,65%

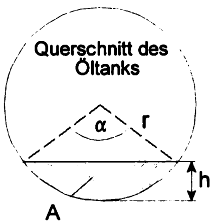
9.15 Flächeninhalt A eines Segments der kreisförmigen Querschnitts-fläche: $A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$, α im Bogenmaß; bei gegebenem α ist $h = r \cdot \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$; Länge des Tanks: 20 dm;

Fassungsvermögen des Öltanks: $\pi \cdot r^2 \cdot l = 2262$ Liter;

$V_1 = 500 = A \cdot 20 = 10 \cdot 6^2(\alpha - \sin\alpha) = 500$ oder

$f(\alpha) = 360 \cdot (\alpha - \sin\alpha) - 500 = 0$; $f'(\alpha) = 360 \cdot (1 - \cos\alpha)$;

Startwert für $V_1 = 500$ Liter: $\alpha_0 = 2$ rad $\approx 115°$:



n	α_n	$f(\alpha_n)$	$f'(\alpha_n)$	$\alpha_n - f(\alpha_n)/f'(\alpha_n)$
0	2	-107,3471	509,81	2,2106
1	2,211	6,9973	574,92	2,1984
2	2,198	0,0215	571,39	2,1984
3	2,198	0,0000	571,38	2,1984

$\alpha = 2{,}198$ rad $\approx 126°$.

$h_1 = r \cdot \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 3{,}27$ dm ≈ 33 cm

$V_2 = 1000 = 10 \cdot 6^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$; $f(\alpha) = 360 \cdot (\alpha - \sin\alpha) - 1000 = 0 \Rightarrow \alpha = 2{,}959$ rad $\approx 170°$;

$h_2 = 5{,}45$ dm ≈ 55 cm;

$V_3 = 1500 = 10 \cdot 6^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$; $f(\alpha) = 360 \cdot (\alpha - \sin\alpha) - 1500 = 0 \Rightarrow \alpha = 3{,}666$ rad $\approx 210°$;

$h_3 = 7{,}55$ dm ≈ 76 cm;

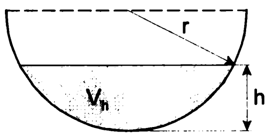
$V_4 = 2000 = 10 \cdot 6^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$; $f(\alpha) = 360 \cdot (\alpha - \sin\alpha) - 2000 = 0 \Rightarrow \alpha = 4{,}566$ rad $\approx 262°$;

$h_4 = 9{,}92$ dm ≈ 99 cm;

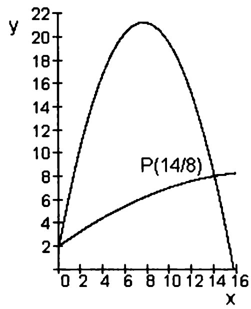
9.16 $V_{Halbkugel} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{3} = \frac{2000}{3} \cdot \pi$;

Kugelsegment der Höhe h: $V_h = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h)$; $V_h = \frac{1}{2} \cdot V_{Halbkugel}$

$\Rightarrow f(h) = h^3 - 30h^2 + 1000 = 0$; Startwert etwa $h_0 = 6 \Rightarrow h = 6{,}5$ cm



9.17 $8 = 2 + 14 \cdot \tan\alpha - \frac{196}{80 \cdot \cos^2\alpha}$; daraus unter Verwendung von $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$: $f(\alpha) = 120 \cdot \cos^2\alpha - 140 \cdot \sin(2\alpha) + 49 = 0$; $f'(\alpha) = -120 \cdot \sin(2\alpha) - 280 \cdot \cos(2\alpha)$, α in rad;



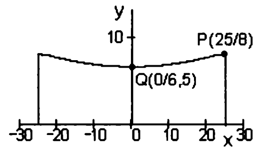
n	α_n	$f(\alpha_n)$	$f'(\alpha_n)$	$\alpha_n - f(\alpha_n)/f'(\alpha_n)$
0	0,5	23,6122	-252,2612	0,5936
1	0,5936	1,6295	-216,0702	0,6011
2	0,6011	0,0123	-212,8067	0,6012
3	**0,6012**	0,0000	-212,7816	0,6012

$\alpha_1^* = 0{,}6012$ rad; Startwert für die zweite Lösung etwa $\alpha_0 = 1{,}5 \Rightarrow$ $\alpha_2^* = 1{,}3745$ rad. Abwurfwinkel im Gradmaß: 34,4° und 78,8°

9.18 P: $8 = a \cdot \cosh\frac{25}{a} + b$; Q: $6{,}5 = a \cdot \cosh\frac{0}{a} + b = a + b \Rightarrow b = 6{,}5 - a$;

$8 = a \cdot \cosh\frac{25}{a} + 6{,}5 - a$ oder $f(a) = a \cdot \cosh\frac{25}{a} - a - 1{,}5 = 0$;

$f'(a) = \cosh\frac{25}{a} - \frac{25}{a} \cdot \sinh\frac{25}{a} - 1$



n	a_n	$f(a_n)$	$f'(a_n)$	$a_n - f(a_n)/f'(a_n)$
0	200	0,0645	-0,0078	208,2284
1	208,2	0,0026	-0,0072	208,5823
2	**208,6**	0,0000	-0,0072	208,5829

$a = 208{,}6$ m

9.19 $u = \frac{x}{L}$; $y(u) = \cdot k \cdot u \cdot (1 - 3u^2 + 2u^3)$, wenn abkürzend $k = \frac{q \cdot L^4}{48 \cdot E \cdot I}$, $k > 0$, gesetzt wird.
$y'(u) = k \cdot (1 - 9u^2 + 8u^3)$; $y''(u) = k \cdot (-18u + 24u^2)$; $y'''(u) = k \cdot (-18 + 48 \cdot u)$;
$y'(u) = 0$ oder $1 - 9u^2 + 8u^3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0{,}4215$; $y''(0{,}4215) \approx -3{,}3k < 0 \Rightarrow u_1 = 0{,}4215$ ist Maximumstelle; $x_{max} = 0{,}4125 \cdot L$ ist die Stelle größter Durchbiegung;
$y'' = 0$ oder $-18u + 24u^2 = 0 \Rightarrow u_2 = 0$ (Einspannstelle, hier nicht von Interesse) sowie $u_3 = 0{,}75$; $y'''(0{,}75) \neq 0 \Rightarrow u_3 = 0{,}75$ bzw. $x_W = 0{,}75 \cdot L$ ist Wendestelle;

$y_{max} = 0{,}00542 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$; $y_W = 0{,}00224 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$

9.20 a) Partielle Integration $\Rightarrow G(q) = \left[-\frac{x+2}{2} \cdot e^{-x/2}\right]_0^q = -\frac{q+2}{2} \cdot e^{-q/2} + 1$

b) $-\frac{q+2}{2} e^{-q/2} + 1 = 0{,}95$ oder $f(q) = 0{,}1 - (q + 2) \cdot e^{-q/2}$;

$f'(q) = \frac{q}{2} \cdot e^{-q/2} \Rightarrow q = 9{,}488$

q_n	$f(q_n)$	$f'(q_n)$	$q_n - f(q_n)/f'(q_n)$
9	-0,02220	0,0500	9,4441
9,444	-0,00182	0,0420	9,4874
9,487	-0,00002	0,0413	9,4877
9,488	0,00000	0,0413	9,4877

9.21 $L(x) = \sqrt{10000 + x^2} + \sqrt{2500 + (200 - x)^2}$; $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{10000+x^2}} + \frac{x-200}{\sqrt{42500-400x+x^2}}$;

$L''(x) = \frac{10000}{(10000+x^2)^{3/2}} + \frac{2500}{(42500-400x+x^2)^{3/2}}$; $L'(x) = 0 \Rightarrow x = 133{,}3$; $L''(133{,}3) > 0 \Rightarrow$
$x = 133{,}3$ ist Minimumstelle; kürzeste Verbindung bei $x = 133{,}3$ m

9.22 Die Koordinate y_S des Schwerpunktes mit Hilfe der 1. GULDIN'schen Regel :

$A \cdot 2\pi \cdot y_S = V$; $A = b \cdot h - \frac{\pi}{2} \cdot r^2 = 8400 - \frac{\pi}{2} \cdot r^2$; $V = \pi \cdot h^2 \cdot b - \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \pi \cdot \left(588000 - \frac{4}{3} \cdot r^3\right)$;

$y_S = 40$: $\left(8400 - \frac{\pi}{2} \cdot r^2\right) \cdot 80\pi = \pi \cdot \left(588000 - \frac{4}{3} \cdot r^3\right)$; $672000 - 40\pi \cdot r^2 = 588000 - \frac{4}{3} \cdot r^3$

$f(r) = r^3 - 30\pi \cdot r^2 + 63000 \Rightarrow r = 31{,}7\,\text{mm}$

9.23 a) $f(x)=1+x\cdot(-4+x\cdot(2+x\cdot(-3+x)));$

$f(3)=1+3\cdot(-4+3\cdot(2+3\cdot(-3+3)))=1+3\cdot(-4+3\cdot(2+0))=1+3\cdot(-4+6)=7$

b) $f(x)=-5+x^2\cdot(-1+x\cdot(-3+x^2));$

$f(2)=-5+4\cdot(-1+2\cdot(-3+4))=-5+4\cdot(-1+2\cdot 1)=-5+4\cdot 1=-1$

c) $f(x)=x\cdot(-8+x\cdot(5+x\cdot(2+x\cdot(1-x)\cdot)));\ f(-2)=(-2)\cdot(-8-2\cdot(5-2\cdot(2-2\cdot(1+2)\cdot)))=$

$=(-2)\cdot(-8-2\cdot(5-2\cdot(2-6\cdot)))=(-2)\cdot(-8-2\cdot(5+8))=(-2)\cdot(-8-26)=68$

d) $f(x) = x\cdot(-10 + x^2\cdot(-1 + x^2\cdot(-7 + x^3)));$

$f(2) = 2\cdot(-10 + 4\cdot(-1 + 4\cdot(-7 + 8))) = 2\cdot(-10 + 4\cdot(-1 + 4\cdot 1)) = 2\cdot(-10 + 4\cdot 3) = 4$

9.24 a) I: $0{,}7257 = 0{,}59\cdot k + d$

$\underline{\text{II: } 0{,}7291 = 0{,}60\cdot k + d}$

$k = 0{,}3400;\ d = 0{,}5251$

$y = 0{,}3400\cdot x + 0{,}5251;\ y(0{,}593) = 0{,}7267$

b) I: $0{,}7291 = 0{,}60\cdot k + d$

$\underline{\text{II: } 0{,}7324 = 0{,}61\cdot k + d}$

$k = 0{,}3300;\ d = 0{,}5311$

$y = 0{,}3300\cdot x + 0{,}5311;\ y(0{,}606) = 0{,}7311$

9.25 a) I: $0{,}9759 = 0{,}22\cdot k + d$

$\underline{\text{II: } 0{,}9737 = 0{,}23\cdot k + d}$

$k = -0{,}2200;\ d = 1{,}0243$

$y = -0{,}2200\cdot x + 1{,}0243;\ y(0{,}222) = 0{,}9755$

b) I: $0{,}9737 = 0{,}23\cdot k + d$

$\underline{\text{II: } 0{,}7337 = 0{,}24\cdot k + d}$

$k = -0{,}2400;\ d = 1{,}0289$

$y = -0{,}200\cdot x + 1{,}0289;\ y(0{,}237) = 0{,}9720$

9.26 a) I: $1 = k + d$

$\underline{\text{II: } \sqrt{2} = 2\cdot k + d}$

$k = 0{,}4142;\ d = 0{,}5858$

$y(x) = 0{,}4142\cdot x + 0{,}5858;$

$y(1{,}44) = 1{,}1822$

(genau: $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$)

b) $\sqrt{x} \geq y(x)$ für $1 \leq x \leq 2$; absoluter Fehler:

$f(x) = \sqrt{x} - (0{,}4142\cdot x + 0{,}5858);$

$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} - 0{,}4142 = 0 \Rightarrow x = 1{,}4571;$

$f''(x) = -4/x^{3/2}$; $f''(1{,}4571) < 0 \Rightarrow$ für $x = 1{,}4571$ ist der absolute Fehler maximal; $f(1{,}4571) = 0{,}0178$

9.27 a) I: $\ln 1{,}2 = 1{,}2\cdot k + d$

$\underline{\text{II: } \ln 2 = 2k + d}$

$k = 0{,}6385;\ d = -0{,}5839$

$y(x) = 0{,}6385\cdot x - 0{,}5839;$

$\ln 1{,}5 \approx y(1{,}5) = 0{,}3739$

(genau: $\ln 1{,}5 = 0{,}4055$)

abs. Fehler: $\ln 1{,}5 - y(1{,}5) = 0{,}0316$

b) $\ln x \geq y(x)$ für $1{,}2 \leq x \leq 2$; absoluter Fehler:

$f(x) = \ln x - (0{,}6385\cdot x - 0{,}5839)$

$f'(x) = f'(x) = \frac{1}{x} - 0{,}6385 = 0 \Rightarrow x = ;$

$f''(x) = -1/x^2$; $f''(1{,}5661) < 0 \Rightarrow$ für $x = 1{,}5661$ ist der absolute Fehler maximal; $f(1{,}5661) = 0{,}0325$

9.28 a) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$

$P_0 \Rightarrow$ I: $3 = c$

$P_1 \Rightarrow$ II: $3 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$

$\underline{P_2 \Rightarrow \text{III: } 6 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c}$

$a = 1,\ b = -2,\ c = 3;$

$y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$

$P_0 \Rightarrow$ I: $3 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$

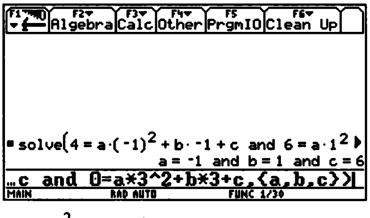
$P_1 \Rightarrow$ II: $1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$

$\underline{P_2 \Rightarrow \text{III: } 6 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c}$

$a = 2,\ b = -1,\ c = 0;$

$y = 2x^2 - x$

c) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$



$y = -x^2 + x + 6$

d) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$

Mathcad: Vorgabe

$-3 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c$

$5 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$

$-3 = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + c$

$\text{Suchen}(a,b,c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$y = -x^2/2 + 2x + 3$

9.29 a) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$
$P_0 \Rightarrow$ I: $8{,}16 = a\cdot 0{,}4^2 + b\cdot 0{,}4 + c$
$P_1 \Rightarrow$ II: $8{,}56 = a\cdot 1{,}2^2 + b\cdot 1{,}2 + c$
$\underline{P_2 \Rightarrow \text{III: } 11{,}28 = a\cdot 2{,}8^2 + b\cdot 2{,}8 + c}$
$a = 0{,}5,\ b = -0{,}3,\ c = 8{,}2;$
$y = 0{,}5\cdot x^2 - 0{,}3\cdot x + 8{,}2$

b) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$
$P_0 \Rightarrow$ I: $1 = a\cdot 0{,}8^2 + b\cdot 0{,}8 + c$
$P_1 \Rightarrow$ II: $5{,}76 = a\cdot 1{,}2^2 + b\cdot 1{,}2 + c$
$\underline{P_2 \Rightarrow \text{III: } 10{,}66 = a\cdot 2{,}6^2 + b\cdot 2{,}6 + c}$
$a = -4{,}667,\ b = 21{,}233,\ c = -13;$
$y = -4{,}667\cdot x^2 + 21{,}233\cdot x - 13$

9.30 $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$
I: $6{,}0 = a\cdot 70^2 + b\cdot 70 + c$
II: $7{,}1 = a\cdot 90^2 + b\cdot 90 + c$
$\underline{\text{III: } 9{,}9 = a\cdot 120^2 + b\cdot 120 + c}$

$a = 0{,}000767;\ b = -0{,}0677;\ c = 6{,}98;$
$y = 0{,}000767\, x^2 - 0{,}0677\, x + 6{,}98;$
$y(100) = 7{,}9\ l$ Verbrauch bei $v = 100$ km/h

9.31 $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$
$x = 0$: I: $\sin 0 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$
$x = \pi/4$: II: $\sin(\pi/4) = a\cdot(\pi/4)^2 + b\cdot\pi/4 + c$
$\underline{x = \pi/2\text{: III: } \sin(\pi/2) = a\cdot(\pi/2)^2 + b\cdot\pi/2 + c}$

$a = -0{,}3357;\ b = 1{,}1640;\ y = -0{,}3357\cdot x^2 + 1{,}1640\cdot x$:
interpolierter Wert: $y(\pi/3) = 0{,}8508$;
wahrer Wert: $\sin(\pi/3) = 0{,}8660$;
absol. Fehler: $-0{,}0153$; rel. Fehler: $\approx 1{,}8\%$

9.32 $y = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d;$
I: $0 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d \Rightarrow d = 0$
II: $1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$
III: $0 = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d$
$\underline{\text{IV: } 0 = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d}$

$a = 1/2;\ b = -5/2;\ c = 3;$
$$y = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot x^2 + 3x$$

9.33 a) $y = a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0;$
I: $0 = a_4\cdot 0^4 + a_3\cdot 0^3 + a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0$
$\Rightarrow a_0 = 0$
II: $1 = a_4\cdot 1^4 + a_3\cdot 1^3 + a_2\cdot 1^2 + a_1\cdot 1 + a_0$
III: $2 = a_4\cdot 4^4 + a_3\cdot 4^3 + a_2\cdot 4^2 + a_1\cdot 4 + a_0$
IV: $3 = a_4\cdot 9^4 + a_3\cdot 9^3 + a_2\cdot 9^2 + a_1\cdot 9 + a_0$
$\underline{\text{V: } 4 = a_4\cdot 16^4 + a_3\cdot 16^3 + a_2\cdot 16^2 + a_1\cdot 16 + a_0}$

$$y = -\frac{1}{1008}x^4 + \frac{11}{360}x^3 - \frac{43}{144}x^2 + \frac{533}{420}x;$$
$$\sqrt{12} \approx -\frac{1}{1008}\cdot 12^4 + \frac{11}{360}\cdot 12^3 - \frac{43}{144}\cdot 12^2 + \frac{533}{420}\cdot 12 = \frac{156}{35} \approx 4{,}46$$

b) $y = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d;$
I: $1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$
II: $2 = a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + d$
III: $3 = a\cdot 9^3 + b\cdot 9^2 + c\cdot 9 + d$
$\underline{\text{IV: } 4 = a\cdot 16^3 + b\cdot 16^2 + c\cdot 16 + d}$

$$y = \frac{1}{1260}x^3 - \frac{1}{36}x^2 + \frac{41}{90}x + \frac{4}{7};$$
$$\sqrt{12} \approx \frac{1}{1260}\cdot 12^3 - \frac{1}{36}\cdot 12^2 + \frac{41}{90}\cdot 12 + \frac{4}{7} = \frac{358}{105} = 3{,}41$$

c) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;$
I: $2 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c$
II: $3 = a\cdot 9^2 + b\cdot 9 + c$
$\underline{\text{III: } 4 = a\cdot 16^2 + b\cdot 16 + c}$

$$y = -\frac{1}{210}x^2 + \frac{11}{42}x + \frac{36}{35};$$
$$\sqrt{12} \approx -\frac{1}{210}\cdot 12^2 + \frac{11}{42}\cdot 12 + \frac{36}{35} = \frac{122}{35} = 3{,}49$$

9.34 a) $S_0(x) = a_0 + b_0\cdot x + c_0\cdot x^2 + d_0\cdot x^3$ für $0 \le x \le 1$
$S_1(x) = a_1 + b_1\cdot(x-1) + c_1\cdot(x-1)^2 + d_1\cdot(x-1)^3$
für $1 \le x \le 2$
$S_0'(x) = b_0 + 2c_0\cdot x + 3d_0\cdot x^2$
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1\cdot(x-1) + 3d_1\cdot(x-1)^2$
$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0\cdot x$
$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1\cdot(x-1)$

System von 8 linearen Gleichungen für die 8 Unbekannten $a_0, b_0, \dots, d_1$:
$S_0(0) = a_0 = 1;$
$S_1(1) = a_1 = 0;$
$S_1(2) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0;$
$S_0(1) = S_1(1)$: $a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1;$
$S_0'(1) = S_1'(1)$: $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1;$
$S_0''(1) = S_1''(1)$: $2c_0 + 6d_0 = 2c_1;$
$S_0''(0) = 2c_0 = 0;$
$\underline{S_1''(2) = 2c_1 + 6d_1 = 0}$
$$\Rightarrow S_0(x) = 1 - \frac{5}{4}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot x^3$$
$$S_1(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-1) + \frac{3}{4}\cdot(x-1)^2 - \frac{1}{4}\cdot(x-1)^3$$

9.34 b) $S_0(x) = a_0 + b_0 \cdot x + c_0 \cdot x^2 + d_0 \cdot x^3$ für $0 \le x \le 1$
$S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot (x-1) + c_1 \cdot (x-1)^2 + d_1 \cdot (x-1)^3$ für $1 \le x \le 2$
$S_0'(x) = b_0 + 2c_0 \cdot x + 3d_0 \cdot x^2$
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1 \cdot (x-1) + 3d_1 \cdot (x-1)^2$
$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0 \cdot x$
$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1 \cdot (x-1)$

System von 8 linearen Gleichungen für die 8 Unbekannten $a_0, b_0, \ldots, d_1$:
$S_0(0) = a_0 = 1$;
$S_1(1) = a_1 = 1$;
$S_1(2) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$;
$S_0(1) = S_1(1)$: $a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1$;
$S_0'(1) = S_1'(1)$: $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$;
$S_0''(1) = S_1''(1)$: $2c_0 + 6d_0 = 2c_1$;
$S_0''(0) = 2c_0 = 0$;
$\underline{S_1''(2) = 2c_1 + 6d_1 = 0}$

$$\Rightarrow S_0(x) = 1 + \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^3$$
$$S_1(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{3}{4} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot (x-1)^3$$

c) $S_0(x) = a_0 + b_0 \cdot x + c_0 \cdot x^2 + d_0 \cdot x^3$ für $0 \le x \le 1$
$S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot (x-1) + c_1 \cdot (x-1)^2 + d_1 \cdot (x-1)^3$ für $1 \le x \le 2$
$S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot (x-2) + c_2 \cdot (x-2)^2 + d_2 \cdot (x-2)^3$ für $2 \le x \le 3$
$S_0'(x) = b_0 + 2c_0 \cdot x + 3d_0 \cdot x^2$
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1 \cdot (x-1) + 3d_1 \cdot (x-1)^2$
$S_2'(x) = b_2 + 2c_2 \cdot (x-2) + 3d_2 \cdot (x-2)^2$
$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0 \cdot x$
$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1 \cdot (x-1)$
$S_2''(x) = 2c_2 + 6d_2 \cdot (x-2)$

System von 12 linearen Gleichungen für die 12 Unbekannten $a_0, b_0, \ldots, d_1$:
$S_0(0) = a_0 = 0$;
$S_1(1) = a_1 = 1$;
$S_2(2) = a_2 = 2$;
$S_2(3) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$;
$S_0(1) = S_1(1)$: $a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1$;
$S_1(2) = S_2(2)$: $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2$;
$S_0'(1) = S_1'(1)$: $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$;
$S_1'(2) = S_2'(2)$: $b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2$;
$S_0''(1) = S_1''(1)$: $2c_0 + 6d_0 = 2c_1$;
$S_1''(2) = S_2''(2)$: $2c_1 + 6d_1 = 2c_2$;
$S_0''(0) = 2c_0 = 0$;
$\underline{S_2''(3) = 2c_2 + 6d_2 = 0}$

$$\Rightarrow S_0(x) = \frac{14}{15} \cdot x + \frac{1}{15} \cdot x^3$$
$$S_1(x) = 1 + \frac{17}{15} \cdot (x-1) + \frac{1}{5} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3$$
$$.S_2(x) = 2 + \frac{8}{15} \cdot (x-2) - \frac{4}{5} \cdot (x-2)^2 + \frac{4}{15} \cdot (x-2)^3$$

d) $S_0(x) = a_0 + b_0 \cdot x + c_0 \cdot x^2 + d_0 \cdot x^3$ für $0 \le x \le 2$
$S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot (x-2) + c_1 \cdot (x-2)^2 + d_1 \cdot (x-2)^3$ für $2 \le x \le 3$
$S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot (x-3) + c_2 \cdot (x-3)^2 + d_2 \cdot (x-3)^3$ für $3 \le x \le 5$
$S_0'(x) = b_0 + 2c_0 \cdot x + 3d_0 \cdot x^2$
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1 \cdot (x-2) + 3d_1 \cdot (x-2)^2$
$S_2'(x) = b_2 + 2c_2 \cdot (x-3) + 3d_2 \cdot (x-3)^2$
$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0 \cdot x$
$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1 \cdot (x-2)$
$S_2''(x) = 2c_2 + 6d_2 \cdot (x-3)$

Lösung des linaren Gleichungssystems mit Mathcad siehe nächste Seite.

System von 12 linearen Gleichungen für die 12 Unbekannten $a_0, b_0, \ldots, d_1$:
$S_0(0) = a_0 = 0$;
$S_1(2) = a_1 = 1$;
$S_2(3) = a_2 = 2$;
$S_2(5) = a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 0$;
$S_0(2) = S_1(2)$: $a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = a_1$;
$S_1(3) = S_2(3)$: $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2$;
$S_0'(2) = S_1'(2)$: $b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1$;
$S_1'(3) = S_2'(3)$: $b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2$;
$S_0''(2) = S_1''(2)$: $2c_0 + 12d_0 = 2c_1$;
$S_1''(3) = S_2''(3)$: $2c_1 + 6d_1 = 2c_2$;
$S_0''(0) = 2c_0 = 0$;
$\underline{S_2''(5) = 2c_2 + 12d_2 = 0}$

$$\Rightarrow S_0(x) = \frac{3}{14} \cdot x + \frac{1}{14} \cdot x^3$$
$$S_1(x) = 1 + \frac{15}{14} \cdot (x-2) + \frac{3}{7} \cdot (x-2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (x-2)^3$$
$$S_2(x) = 2 + \frac{3}{7} \cdot (x-3) - \frac{15}{14} \cdot (x-3)^2 + \frac{5}{28} \cdot (x-3)^3$$

Lösung des Gleichungssystems von 9.34 d) mit Hilfe von Mathcad (Indizes sind "Literalindizes"):

Vorgabe

$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_2 + 2 \cdot b_2 + 4 \cdot c_2 + 8 \cdot d_2 = 0$

$a_0 + 2 \cdot b_0 + 4 \cdot c_0 + 8 \cdot d_0 = a_1 \qquad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2$

$b_0 + 4 \cdot c_0 + 12 \cdot d_0 = b_1 \qquad b_1 + 2 \cdot c_1 + 3 \cdot d_1 = b_2$

$2 \cdot c_0 + 12 \cdot d_0 = 2 \cdot c_1 \qquad 2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1 = 2 \cdot c_2 \qquad 2 \cdot c_0 = 0 \qquad 2 \cdot c_2 + 12 \cdot d_2 = 0$

$$\text{Suchen}(a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{14} \\ 0 \\ \frac{1}{14} \\ 1 \\ \frac{15}{14} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} +$$

9.35 a) $\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = Ortsvektor von P_0; $\vec{x}(t=1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ = Ortsvektor von P_3

b) $x(t) = (1-t)^3 + 3t \cdot (1-t)^2 \cdot 2 + 3t^2 \cdot (1-t) \cdot 4 + t^3 \cdot 5 = -2t^3 + 3t^2 + 3t + 1$;

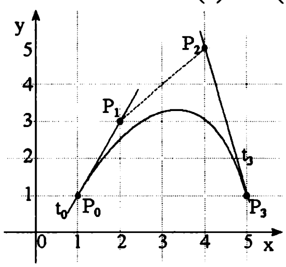
$y(t) = (1-t)^3 + 3t \cdot (1-t)^2 \cdot 3 + 3t^2 \cdot (1-t) \cdot 5 + t^3 = -6t^3 + 6t + 1$;

$y'(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-18t^2 + 6}{-6t^2 + 6t + 3} = \frac{6t^2 - 2}{2t^2 - 2t - 1}$: Tangente t_0 in P_0: $t = 0$, $y'(t = 0) = 2$;

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; für $\lambda = 2$ ist $\vec{x}$ Ortsvektor von $P_1(2/3)$. Tangente t_3 in P_3: $t = 1$,

$y'(t = 1) = -4$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; für $\mu = -1$ ist $\vec{x}$ Ortsvektor von $P_2(4/5)$

c)



10 Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

10.1 a) Geraden: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x+1$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x+2$; $y=-\frac{1}{2}x+5$

b) Geraden: $y = x + 5$; $y = x + 4$; $y = x + 3$; $y = x + 2$; $y = x +1$;

c) Geraden: $y = -x + 5$; $y = -x + 4$; $y = -x + 3$; $y = -x + 2$; $y = -x + 1$;

d) Geraden: $y=-\frac{4}{3}x+4$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$; $y=-\frac{4}{3}x+2$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

10.2 a) Parabeln: $y = x^2 + 1$; $y = x^2$; $y = x^2 - 1$; $y = x^2 - 2$; $y = x^2 - 3$

b) Parabeln: $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}x^2+1$; $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$; $y=\frac{1}{2}x^2+2$

c) Parabeln: $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x^2+1$; $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x^2+2$; $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$

d) Punkt (0/0) sowie die Kreise: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 =2$, $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 4$

10.3 a) $z_x = 2$; $z_y = 3$ b) $z_x = 2x$; $z_y = 2$ c) $z_x = y$; $z_y = x$

d) $z_x = 2xy$; $z_y = x^2$ e) $z_x=\frac{1}{5}$; $z_y=\frac{1}{5}$ f) $z_x=-\frac{1}{x^2}$; $z_y=1$

g) $z_x = 1$; $z_y=-\frac{1}{2y^2}$ h) $z_x=\frac{1}{3y}$; $z_y=-\frac{x}{3y^2}$ i) $z_x=-\frac{1}{5x^2y}$; $z_y=-\frac{1}{5xy^2}$

j) $z_x=2(x-3y)$; $z_y=6(3y-x)$ k) $z_x=\frac{2x\cdot y}{9}$; $z_y=\frac{x^2}{9}$ l) $z_x=\frac{1}{y}$; $z_y=\frac{-x-1}{y^2}$

m) $z_x=1$; $z_y=-\frac{1}{y^2}$ n) $z_x=\frac{y}{3}$; $z_y=\frac{xy^2-1}{3y^2}$

o) $z_x=\frac{-2y}{(x-y)^2}$; $z_y=\frac{2x}{(x-y)^2}$ p) $z_x=\frac{2xy^2}{y+1}$; $z_y=\frac{x^2y^2+2x^2y-1}{(y+1)^2}$

10.4 a) $z_x=\sqrt{y}$; $z_y=\frac{x}{2\sqrt{y}}$ b) $z_x=\frac{1}{3\sqrt{y}}$; $z_y=\frac{-x}{6\sqrt{y^3}}$ c) $z_x = z_y=\frac{1}{2\sqrt{x+y}}$

d) $z_x=\frac{3}{\sqrt{3(6x+y)}}$; $z_y=\frac{1}{2\sqrt{3(y+6x)}}$ e) $z_x=2(x-1)\cdot y^3$; $z_y = 3y^2\cdot(x - 1)^2$

f) $z_x=-\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot(1-y)=-\frac{(x-2)(y-1)}{2}$; $z_y=-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{(x-2)^2}{4}$

g) $z_x=-\frac{2}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}+y\right)=-\frac{2(1+x\cdot y)}{x^3}$; $z_y=2\cdot\left(\frac{1}{x}+y\right)=\frac{2(x\cdot y+1)}{x}$

h) $z_x=2\cdot\left(1-\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{x-2(y+2)}{8}$; $z_y=2\cdot\left(1-\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2y-x+4}{4}$

10.5 a) $z = x + \ln 2 + \ln y$; $z_x =1$; $z_y=\frac{1}{y}$ b) $z = \ln x - \ln y$; $z_x=\frac{1}{x}$; $z_y=-\frac{1}{y}$

c) $z=y^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\ln x$; $z_x=\frac{1}{2x}$; $z_y=-\frac{1}{y^2}$ d) $z_x=\frac{1}{x+2y}$; $z_y=\frac{2}{x+2y}$

e) $z = 2\cdot\ln x +\ln y$; $z_x=\frac{2}{x}$; $z_y=\frac{1}{y}$ f) $z_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $z_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

g) $z = \ln x - \ln(1-y)$; $z_x=\frac{1}{x}$; $z_y=-\frac{1}{1-y}\cdot(-1)=\frac{1}{1-y}$ h) $z = x^{-1}\cdot\ln y^{-2}$; $z_x=\frac{\ln y^2}{x^2}$; $z_y=-\frac{2}{xy}$

10.6 a) $z_x = e^y$; $z_y = x\,e^y$ b) $z_x = z_y = e^{x+y}$ c) $z_x = y\,e^{x\cdot y}$; $z_y = x\,e^{x\cdot y}$

d) $z_x = e^{-y}$; $z_y = -x\,e^{-y}$ e) $z_x = -e^{-x}$; $z_y = 1$ f) $z_x = -\frac{y}{e^x}$; $z_y = \frac{1}{e^x}$

g) $z_x = -\frac{2}{x^2 e^y}$; $z_y = -\frac{2}{x\,e^y}$ h) $z_x = \frac{e^x}{1+e^y}$; $z_y = -\frac{e^y(1+e^x)}{(1+e^y)^2}$

10.7 a) $z_x = z_y = \cos(x+y)$ b) $z_x = 2\cos(2x-3y)$; $z_y = -3\cdot\cos(2x-3y)$

c) $z_x = \sin y$; $z_y = x\cdot\cos y$ d) $z_x = -2y\cdot\sin(2x)$; $z_y = \cos(2x)$

e) $z_x = \cos x\cdot\cos y$; $z_y = -\sin x\cdot\sin y$ f) $z_x = 2\cdot\cos(2x+1)\cdot\cos(3y)$; $z_y = -3\cdot\sin(2x+1)\cdot\sin(3y)$

g) $z_x = \tan y$; $z_y = x\cdot\tan^2 y + x$ h) $z_x = y + y\cdot\tan^2(x\cdot y)$; $z_y = x + x\cdot\tan^2(x\cdot y)$

10.8 a) $z_x = 2x$; $z_y = -3$; $z_{xx} = 2$; $z_{yy} = 0$; $z_{xy} = z_{yx} = 0$

b) $z_x = y$; $z_y = x$; $z_{xx} = 0$; $z_{yy} = 0$; $z_{xy} = z_{yx} = 1$

c) $z_x = 2xy^2$; $z_y = 2x^2y$; $z_{xx} = 2y^2$; $z_{yy} = 2x^2$; $z_{xy} = z_{yx} = 4xy$

d) $z_x = \frac{1}{y}$; $z_y = -\frac{x}{y^2}$; $z_{xx} = 0$; $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$; $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

e) $z_x = \frac{2x}{y}$; $z_y = -\frac{x^2}{y^2}$; $z_{xx} = \frac{2}{y}$; $z_{yy} = \frac{2x^2}{y^3}$; $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{2x}{y^2}$

f) $z_x = -e^y$; $z_y = (1-x)\cdot e^y$; $z_{xx} = 0$; $z_{yy} = (1-x)\cdot e^y$; $z_{xy} = z_{yx} = -e^y$

g) $z_x = \sin(2y)$; $z_y = 2x\cdot\cos(2y)$; $z_{xx} = 0$; $z_{yy} = -4x\cdot\sin(2y)$; $z_{xy} = z_{yx} = 2\cdot\cos(2y)$

h) $z_x = \frac{1}{x+1}$; $z_y = -\frac{1}{y}$; $z_{xx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $z_{yy} = \frac{1}{y^2}$; $z_{xy} = z_{yx} = 0$

10.9 $z = 12 - (x+y)$; Produkt $f(x,y) = x\cdot y\cdot(12 - x - y)$;

$\frac{\partial f}{\partial x} = (12 - 2x - y)\cdot y = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = (12 - 2y - x)\cdot x = 0$; da sinnvollerweise $x \neq 0$ und zugleich $y \neq 0$, folgt daraus das lineare Gleichungssystem I: $12 - 2x - y = 0$, II: $12 - 2y - x = 0$;
Lösung: $x = 4$, $y = 4$; damit: $z = 12 - (4+4) = 4$; alle Summanden x, y und z haben den Wert 4

10.10 x, y, z Kantenlängen (z Höhe)

a) $O = 2\cdot(x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z)$; Nebenbedingung: $x\cdot y\cdot z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{x\cdot y}$; damit:

$$O(x,y) = 2\cdot\left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right);\ \frac{\partial O}{\partial x} = 2\cdot\left(y - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ und } \frac{\partial O}{\partial y} = 2\cdot\left(x - \frac{1}{y^2}\right) = 0 \text{ oder}$$

I: $y = x^2$
II: $x = y^2$,
ein nichtlineares Gleichungssystem; y aus I in II eingesetzt $\Rightarrow x = x^4$ oder $x^4 - x = x\cdot(x^3 - 1) = 0$; da sinnvollerweise $x \neq 0$ und zugleich $y \neq 0$, folgt $x^3 - 1 = 0$, d.h. $x^3 = 1$; $x = \sqrt[3]{1} = 1$ m;
wegen I: $y = 1^2 = 1$ m; $z = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$ m: Würfel mit 1 m Kantenlänge

b) $V = x\cdot y\cdot z$; Nebenbedingung: $4x + 4y + 4z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{4} - x - y$; damit

$$V(x,y) = x\cdot y\cdot\left(\frac{1}{4} - x - y\right);\ \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4}\cdot y - 2x\cdot y - y^2 = y\cdot\left(\frac{1}{4} - 2x - y\right) = 0 \text{ und}$$

$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4}\cdot x - 2x\cdot y - x^2 = x\cdot\left(\frac{1}{4} - 2y - x\right) = 0$; da sinnvollerweise $x \neq 0$ und $y \neq 0$, folgt:

I: $\frac{1}{4} - 2y - x = 0$ sowie II: $\frac{1}{4} - 2x - y = 0$, Lösung dieses linearen Gleichungssystems:

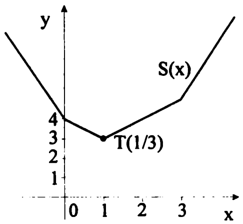
$x = \frac{1}{12}$ m, $y = \frac{1}{12}$ m; $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$ m; Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{12}$ m

10.11 x, y, z Kantenlängen (z Höhe); $O = x\cdot y + 2x\cdot z + 2y\cdot z$; Nebenbedingung: $V = x\cdot y\cdot z = 1\ \text{dm}^3 \Rightarrow$
$z = \frac{1}{x\cdot y}$; damit $O(x,y) = x\cdot y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$; $\frac{\partial O}{\partial x} = y - \frac{2}{x^2} = 0$ und $\frac{\partial O}{\partial y} = x - \frac{2}{y^2} = 0$ oder daraus das nichtlineare Gleichungssystem I: $y\cdot x^2 = 2$ sowie II: $x\cdot y^2 = 2$; I $\Rightarrow$ $y = 2/x^2$, in II eingesetzt:
$x\cdot 4/x^4 = 2$ oder $x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} = 1{,}260$ dm; $y = 2/x^2 = \sqrt[3]{2} = 1{,}260$ dm; $z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = 0{,}630$ dm

10.12 $f(x,y) = x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 = 2x^2 + 2x\cdot y + 2y^2 - 6x - 6y + 9$;
I: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y - 6 = 0$; II: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y - 6 = 0$; Lösung diese linearen Gleichungssystems:
$x = 1$; $y = 1$; $z = 3-x-y = 1$; Punkt P(1/1/1)

10.13 $A = \frac{1}{2}\cdot(a + c)\cdot h$; $a = 100 - 2x$; $c = a + 2x\cdot\cos\alpha = 100 - 2x + 2x\cdot\cos\alpha$; $h = x\cdot\sin\alpha$
$a + c = 100 - 2x + 100 - 2x + 2x\cdot\cos\alpha = 200 - 4x + 2x\cdot\cos\alpha$
$A = (100 - 2x + x\cdot\cos\alpha)\cdot x\cdot\sin\alpha = 100\cdot x\cdot\sin\alpha - 2x^2\cdot\sin\alpha + x^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\frac{\partial A}{\partial x} = 100\cdot\sin\alpha - 4x\cdot\sin\alpha + 2x\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$;
$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 100x\cdot\cos\alpha - 2x^2\cdot\cos\alpha + x^2\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$
Division der ersten Gleichung durch $2\cdot\sin\alpha$ und der zweiten durch x (sinnvollerweise ist $\sin\alpha \neq 0$ und zugleich $x \neq 0$) ergibt wegen $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ das nichtlineare Gleichungssystem:
I: $50 - 2x + x\cdot\cos\alpha = 0$
II: $(100 - 2x)\cdot\cos\alpha + x\cdot(2\cdot\cos^2\alpha - 1) = 0$
I $\Rightarrow \cos\alpha = 2 - 50/x$, in II eingesetzt $\Rightarrow$ $x = 100/3 = 33{,}3$ cm; $\cos\alpha = 2 - 50/x = 1/2 \Rightarrow \alpha = 60°$

10.14 $S(x) = |x| + |x-1| + |x-3|$:
$x < 0$: $S(x) = -x - (x-1) - (x-3) = -3x + 4$
$0 \le x < 1$: $S(x) = x - (x-1) - (x-3) = 4-x$
$1 \le x < 3$: $S(x) = x + x-1 - (x-3) = x + 2$
$3 \le x$: $S(x) = 3x - 4$;
lokales Minimum für x = 1; dies ist der *Median* $\tilde{x}$ oder Zentralwert der drei Werte 0, 1, 3.



10.15 a)

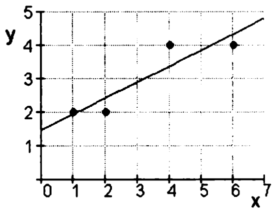
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\cdot y_i$
1	1	2	1	2
2	2	2	4	4
3	4	4	16	16
4	6	4	36	24
$\sum$	13	12	57	46

$y = k\cdot x + d$
I: $k\cdot\sum_1^n x_i + d\cdot n = \sum_1^n y_i$
II: $k\cdot\sum_1^n x_i^2 + d\cdot\sum_1^n x_i = \sum_1^n x_i\cdot y_i$

$\sum_1^4 x_i = 13$; $\sum_1^4 y_i = 12$;
$\sum_1^4 x_i^2 = 57$; $\sum_1^4 x_i\cdot y_i = 46$

I: $13k + 4d = 12$
II: $57k + 13d = 46$

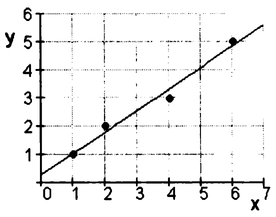
$k = 0{,}475$; $d = 1{,}458$;
$y = 0{,}475\cdot x + 1{,}458$



b) $\sum_1^4 x_i = 13$; $\sum_1^4 y_i = 11$;
$\sum_1^4 x_i^2 = 57$; $\sum_1^4 x_i\cdot y_i = 4$

I: $13k + 4d = 11$
II: $57k + 13d = 47$

$k = 0{,}763$; $d = 0{,}271$
$y = 0{,}763\cdot x + 0{,}271$



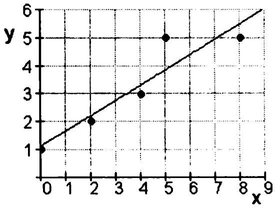
10.15 c) $\sum_1^4 x_i = 19$; $\sum_1^4 y_i = 16$;

$\sum_1^4 x_i^2 = 109$; $\sum_1^4 x_i \cdot y_i = 81$

$$\begin{aligned} \text{I}&: \; 19k + 5d = 16 \\ \text{II}&: \; 109k + 19d = 81 \end{aligned}$$

$k = 0{,}549$; $d = 1114$

$y = 0{,}549 \cdot x + 1{,}114$



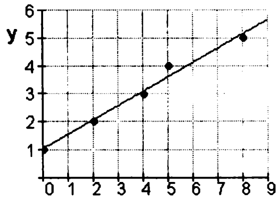
d) $\sum_1^4 x_i = 19$; $\sum_1^4 y_i = 15$;

$\sum_1^4 x_i^2 = 109$; $\sum_1^4 x_i \cdot y_i = 76$

$$\begin{aligned} \text{I}&: \; 19k + 5d = 15 \\ \text{II}&: \; 109k + 19d = 76 \end{aligned}$$

$k = 0{,}516$; $d = 1038$

$y = 0{,}516 \cdot x + 1{,}038$

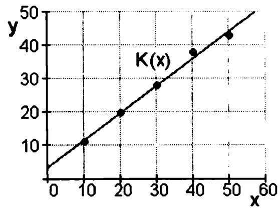


10.16 a) $\sum_1^4 x_i = 150$; $\sum_1^4 y_i = 140$;

$\sum_1^4 x_i^2 = 5500$; $\sum_1^4 x_i \cdot y_i = 5020$

$$\begin{aligned} \text{I}&: \; 150k + 5d = 140 \\ \text{II}&: \; 5500k + 150d = 5020 \end{aligned}$$

$k = 0{,}82$; $d = 3{,}40$;
$K(x) = 0{,}8 \cdot x + 3{,}40$ in € 1000)



b) $K(35) = 0{,}82 \cdot 35 + 3{,}4 = 32{,}1$ in € 1.000, also € 32.100

c) Mathcad:

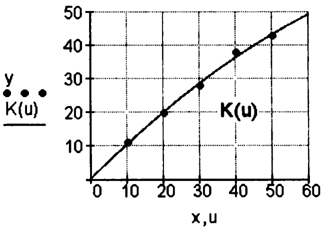
$$x := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 28 \\ 38 \\ 43 \end{pmatrix}$$

$u := 0, 0.1 .. 60$

$r := \text{regress}(x, y, 2)$

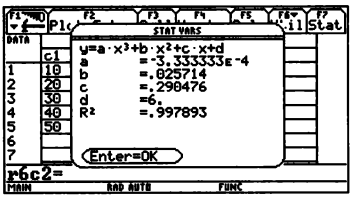
$K(u) := r_5 \cdot u^2 + r_4 \cdot u + r_3$

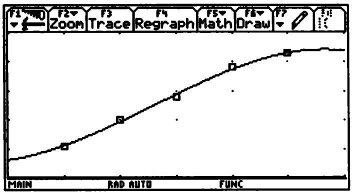
$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0.4 \\ 1.077143 \\ -0.004286 \end{pmatrix}$$



$K(u) = -0{,}004286 \cdot u^2 + 1{,}077 \cdot u + 0{,}4$ (in € 1000)

Voyage 200 (bzw. TI–89)

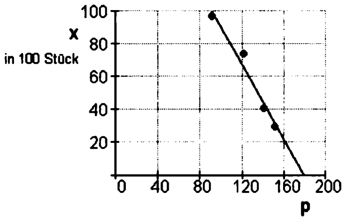




$K(x) = -0{,}00033 \cdot x^3 + 0{,}026 \cdot x^2 +$
$+ 0{,}29 \cdot x + 6$ (in € 1000)

10.17 $\sum_1^4 p_i = 500;\quad \sum_1^4 x_i = 242;$

$\sum_1^4 p_i^2 = 64600;\quad \sum_1^4 p_i \cdot x_i = 27850$



$$\begin{array}{l} \text{I}:\ \ 500k + \ \ 4d = 242 \\ \underline{\text{II}:\ 64600k + 500d = 27850} \end{array} \qquad k = -1{,}143;\quad d = 203{,}4;$$

Ausgleichsgerade: $x(p) = -1{,}143 \cdot p + 203{,}4$; $x = 80$ (in 100 Stück) $\Rightarrow\ p \approx 108$ €

10.18 a) $\sum_1^4 x_i = 12800;\quad \sum_1^4 y_i = 184{,}2;$

$\sum_1^4 x_i^2 = 35920000;\quad \sum_1^4 x_i \cdot y_i = 517320$

$$\begin{array}{l} \text{I}:\ \ 12800k + \ \ 5d = 184{,}2 \\ \underline{\text{II}:\ 35920000k + 12800d = 517320} \end{array}$$

$k = 0{,}0145;\quad d = -0{,}332$

$y(x) = 0{,}0145 \cdot x - 0{,}332$, x Drehzahl pro Minute, y Leistung in kW

b) $x = 3000$: $y(3000) = 0{,}0145 \cdot 3000 - 0{,}332 \approx 43{,}2$ kW

c) $y = 34$ kW: $34 = = 0{,}0145 \cdot x - 0{,}332 \ \Rightarrow\ x \approx 2370$ Umdrehungen pro Minute

10.19 $y = c \cdot e^{b \cdot x}$; Logarithmieren: $\ln y = \ln c + b \cdot x$; setzt man $v = \ln y$, so erhält man $v = b \cdot x + \ln c$, die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = b$ und $d = \ln c$;

a)

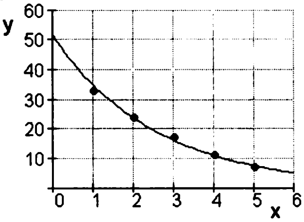
i	x_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	x_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	1	33	3,4965	1	3,4965
2	2	24	3,1781	4	6,3561
3	3	17	2,8332	9	8,4996
4	4	11	2,3979	16	9,5916
5	5	7	1,9459	25	9,7296
Σ	15		13,8516	55	37,6734

$$\begin{array}{l} \text{I}:\ \ 15k + \ \ 5d = 13{,}8516 \\ \underline{\text{II}:\ 55k + 15d = 37{,}6734} \end{array}$$

$k = b = -0{,}388;$

$d = \ln c = 3{,}935 \Rightarrow c = e^{3{,}935} = 51{,}1;$

$y = 51{,}1 \cdot e^{-0{,}388 \cdot x}$



b)

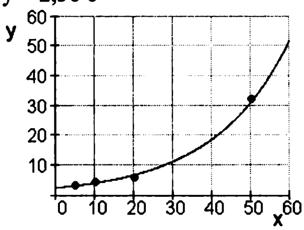
i	x_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	x_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	5	3,1	1,1314	25	17,4825
2	10	4,2	1,4351	100	31,7805
3	20	6,0	1,7918	400	56,6643
4	50	32,1	3,4689	2500	119,8948
Σ	85		7,8271	3025	229,2858

$$\begin{array}{l} \text{I}:\ \ 85k + \ \ 4d = 7{,}8271 \\ \underline{\text{II}:\ 3025k + 85d = 229{,}2858} \end{array}$$

$k = b = 0{,}0517;$

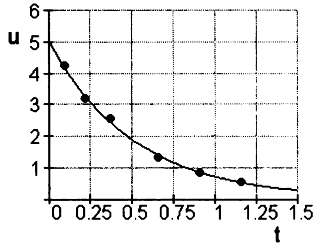
$d = \ln c = 0{,}8590 \Rightarrow c = e^{0{,}8590} = 2{,}36;$

$y = 2{,}36 \cdot e^{0{,}0517 \cdot x}$



10.20 $u = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$; Logarithmieren: $\ln u = \ln U_0 - t/\tau$; setzt man $v = \ln u$, so erhält man $v = -t/\tau + \ln U_0$, die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = -1/\tau$ und $d = \ln U_0$;

i	t_i	u_i	$v_i = \ln u_i$	t_i^2	$t_i \cdot v_i$
1	0,09	4,27	1,4516	0,0081	0,1306
2	0,21	3,21	1,1663	0,0441	0,2449
...	...	...	...	...	...
6	1,15	0,54	–0,6162	1,3225	–0,7086
Σ	3,36		3,0646	2,7368	0,0423



I: $3{,}36 \cdot k \quad + 6d = 3{,}0646$

II: $\underline{2{,}7368 \cdot k + 3{,}36 \cdot d = 0{,}0423}$

$k = -1/\tau = -1{,}9573 \Rightarrow \tau = 0{,}51$ s

Weiters: $d = \ln U_0 = 1{,}607 \Rightarrow U_0 = e^{1{,}607} = 4{,}99$ V; $u(t) = 4{,}99 \cdot e^{-t/0{,}51}$

10.21 $y = \vartheta - \vartheta$, $c = \vartheta_0 - \vartheta_K$, $y = c \cdot e^{-t/\tau}$; Logarithmieren: $\ln y = \ln c - t/\tau$; mit $v = \ln y$ erhält man $v = \ln c - t/\tau$, die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = -1/\tau$ und $d = \ln c$;

a)

i	t_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	t_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	10	134	4,8978	100	48,9784
2	20	90	4,9898	400	89,9962
..	...	...	...	...	...
Σ	180		19,2727	8800	600,5402

I: $180 \cdot k \quad + 5d = 19{,}2727$

II: $\underline{8800 \cdot k + 180 \cdot d = 600{,}5402}$

$k = -1/\tau = -0{,}040 \Rightarrow \tau = 24{,}9$ min;

$d = \ln c = 5{,}302$;

$c = \vartheta_0 - 32 = e^{5{,}302} = 200{,}7 \Rightarrow \vartheta_0 = 232{,}7$°C

b)

i	t_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	t_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	5	72	4,2767	25	21,3833
2	10	56	4,0254	100	40,2535
..	...	...	...	...	...
Σ	65		14,8430	1425	222,9027

I: $65 \cdot k \quad + 4d = 14{,}8430$

II: $\underline{1425 \cdot k + 65 \cdot d = 222{,}9027}$

$k = -1/\tau = -0{,}050 \Rightarrow \tau = 20{,}2$ min;

$d = \ln c = 4{,}517$;

$c = \vartheta_0 - 12 = e^{4{,}517} = 91{,}6 \Rightarrow \vartheta_0 = 103{,}6$°C

10.22 $R = R_{20} + \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta = k \cdot \Delta\vartheta + d$, Gerade mit $k = \alpha \cdot R_{20}$ und $d = R_{20}$;

i	$\Delta\vartheta_i$	R_i	t_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	0	30,4	0	0
2	10	32,2	100	322
..	...	...	...	...
Σ	150	200,9	5500	5220

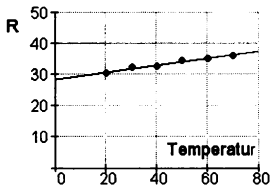
I: $150 \cdot k \quad + 6d = 200{,}9$

II: $\underline{5500 \cdot k + 150 \cdot d = 5220}$

$d = R_{20} = 30{,}7\ \Omega$;

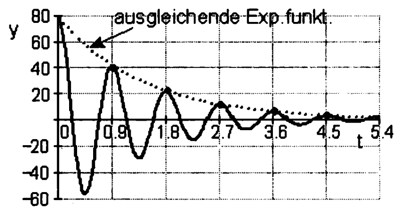
$k = \alpha \cdot R_{20} = 0{,}1129 \Rightarrow$

$\alpha = 0{,}00368\ K^{-1}$



10.23 $\hat{y} = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$; Logarithmieren: $\ln \hat{y} = \ln \hat{y}_0 - \delta \cdot t$; setzt man $v = \ln \hat{y}$, so erhält man $v = -\delta \cdot t + \ln \hat{y}_0$, die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = -\delta$ und $d = \ln \hat{y}_0$;

i	t_i	$\hat{y}_i$	$v_i = \ln \hat{y}_i$	t_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	0,9	40	3,6889	0,81	3,3200
2	1,8	22	2,9957	3,24	5,3923
..	...	...	...	...	...
Σ	13,5	4,45	12,0682	44,55	26,7523



I: $13{,}5 \cdot k \quad + 5d = 12{,}0682$

II: $\underline{44{,}55 \cdot k + 13{,}5 \cdot d = 26{,}7523}$

$k = -\delta = -0{,}720 \Rightarrow \delta = 0{,}720\ s^{-1}$;

Weiters: $d = \ln \hat{y}_0 = 4{,}3576$; $\hat{y}_0 = e^{4{,}3576} = 78{,}1$ mm

10.24 a) I: $14 \cdot k + 4d = 24$
II: $\underline{62k + 14d = 103}$
$k = 1{,}46$; $d = 0{,}88$; $y = 1{,}46 \cdot x + 0{,}88$

b) $y = c \cdot e^{b \cdot x}$; $v = \ln y = \ln c + b \cdot x$, Gerade mit $k = b$ und $d = \ln c$

i	t_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	t_i^2	$x_i \cdot v_i$
1	1	3	1,0986	1	1,0986
2	3	4	1,3863	9	4,1589
..	...	...	...	...	...
Σ	14		6,7334	62	26,8566

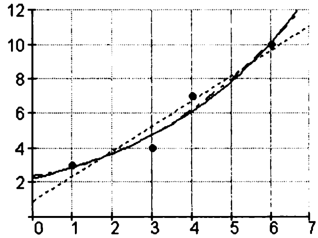
I: $14 \cdot k + 4d = 6{,}7334$
II: $\underline{62k + 14d = 26{,}8566}$
$k = b = 0{,}25$; $d = \ln c = 0{,}7977 \Rightarrow c = 2{,}22$;
$y = 2{,}22 \cdot e^{0{,}25 \cdot x}$.

Abbildung rechts:
Punktiert: Ausgleichsgerade
Linie: Ausgleichung durch Exponentialfunktion
Strich–Punktiert: Ausgleichsparabel

c) Mathcad: $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $y := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

r := regress(x, y, 2) $\quad r = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2.38 \\ 0.29 \\ 0.17 \end{pmatrix}$

$y = 0{,}17 \cdot x^2 + 0{,}29 \cdot x + 2{,}38$



10.25 a) Exakt: $\Delta z = (2x_1 + 3y_1 - 1) - (2x_0 + 3y_0 - 1) = 4{,}6 - 4{,}4 = 0{,}2$

Näherungsweise: $f_x = 2$; $f_y = 3$; $dx = \Delta x = 2{,}05 - 2{,}1 = -0{,}05$; $dy = \Delta y = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$;
$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy = 2 \cdot (-0{,}05) + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$; kein Unterschied zur exakten Lösung bei einer linearen Funktion!

b) Exakt: $\Delta z = \frac{x_1^2}{y_1} - \frac{x_0^2}{y_0} = 0{,}42045 - 0{,}41143 = 0{,}00902$

Näherungsweise: $f_x = \frac{2x}{y}$; $f_y = -\frac{x^2}{y^2}$; $dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 0{,}02$; $dy = \Delta y = y_1 - y_0 = 0{,}04$;

$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy = \frac{2{,}4}{3{,}5} \cdot 0{,}02 - \frac{1{,}2^2}{3{,}5^2} \cdot 0{,}04 = 0{,}00901$

c) Exakt: $\Delta z = \ln\sqrt{x_1 \cdot (1 + y_1)} - \ln\sqrt{x_0 \cdot (1 + y_0)} = 1{,}11393 - 1{,}09861 = 0{,}01532$

$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+y}{x \cdot (1+y)} = \frac{1}{2x}$; $f_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x \cdot (1+y)} = \frac{1}{2 \cdot (1+y)}$; $dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 0{,}2$;

$dy = y_1 - y_0 = -0{,}1$; $dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy = \frac{1}{6} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{6} \cdot (-0{,}1) = 0{,}01667$

d) Exakt: $\Delta z = \left(x_1^2 + y_1^2\right) \cdot e^{-y_1} - \left(x_0^2 + y_0^2\right) \cdot e^{-y_0} = 2{,}26911 - 1{,}83940 = 0{,}42971$

Näherungsweise: $f_x = 2x \cdot e^{-y}$; $f_y = -\left(x^2 - 2y + y^2\right) \cdot e^{-y}$; $dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 0{,}1$; $dy = \Delta y = y_1 - y_0 = -0{,}2$;
$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy = 2 \cdot 2 \cdot e^{-1} \cdot 0{,}1 - (4 - 2 + 1) \cdot e^{-1} \cdot (-0{,}2) = 0{,}36788$

10.26 Exakt: $\Delta z = \pi \cdot \left[\left(R_1^2 - r_1^2\right) \cdot h_1 - \left(R_0^2 - r_0^2\right) \cdot h_0\right] = \pi \cdot [504 - 438{,}651] = 65{,}349 \cdot \pi \approx 205{,}3\,\text{cm}^3$

Näherungsweise: $f_R(R,r,h) = 2 \cdot R \cdot h$; $f_r(R,r,h) = -2 \cdot r \cdot h$; $f_h(R,r,h) = R^2 - r^2$;
$dR = \Delta R = R_1 - R_0 = -0{,}1$; $dr = \Delta r = r_1 - r_0 = 0{,}2$; $dh = \Delta h = h_1 - h_0 = 0{,}3$;
$dz = \pi \cdot |\, 288 \cdot (-0{,}1) - 216 \cdot 0{,}2 + 28 \cdot 0{,}3 \,| = 199{,}8\ \text{cm}^3$

10.27 $V = \pi h\cdot(R^2 - r^2)$; $\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi\cdot R\cdot h$; $\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi\cdot r\cdot h$; $dh = 0$; $dV = \frac{\partial V}{\partial R}\cdot dR + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial V}{\partial h}\cdot dh =$
$= 2\pi\cdot R_0\cdot h_0\cdot dR - 2\pi\cdot r_0\cdot h_0\cdot dr = 0 \Rightarrow dR = (r_0/R_0)\cdot dr = 6/8\cdot 0{,}10 = 0{,}075$ cm

10.28 $\frac{\partial T}{\partial L} = \frac{\pi\cdot C}{\sqrt{L\cdot C}}$; $\frac{\partial T}{\partial C} = \frac{\pi\cdot L}{\sqrt{L\cdot C}}$; $dT = \frac{\partial T}{\partial L}\cdot dL + \frac{\partial T}{\partial C}\cdot dC = \frac{\pi\cdot C_0}{\sqrt{L_0\cdot C_0}}\cdot dL + \frac{\pi\cdot L_0}{\sqrt{L_0\cdot C_0}}\cdot dC$; $T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{L_0\cdot C_0}$;
$dT/T_0 = ½\cdot dL/L_0 + ½\cdot dC/C_0 = ½\cdot 4\% + ½\cdot(-2\%) = 1\%$

10.29 $h_0 = 54{,}0$ cm; $r_0 = 48{,}0$ cm; $V = \frac{\pi\cdot h^2}{3}\cdot(3r - h)$; $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi h(2r - h)$; $\frac{\partial V}{\partial r} = \pi h^2$;

$V_0 = \frac{\pi\cdot h_0^2}{3}\cdot(3\cdot r_0 - h_0) = 274{,}826\ \text{cm}^3$;
$\Delta V_{max} = \pi h_0(2r_0 - h_0)\cdot|\Delta h| + \pi h_0^2\cdot|\Delta r| \approx 8{,}1\ \text{cm}^3$; $V = (274{,}8 \pm 8{,}1)\ \text{cm}^3$

10.30 a) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{c}{\sqrt{c^2-a^2}}$; $\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{-a}{\sqrt{c^2-a^2}}$; $\Delta b_{max} = \frac{1}{\sqrt{c_0^2-a_0^2}}\left(c_0\,|\Delta c| + a_0\,|\Delta a|\right) \approx 0{,}49$ m

b) $\beta = \arccos\frac{a}{c}$, $\frac{\partial\beta}{\partial a} = \frac{-c}{\sqrt{c^2-a^2}}$; $\frac{\partial\beta}{\partial c} = \frac{a/c}{\sqrt{c^2-a^2}}$; $\Delta\beta_{max}\ \frac{1}{\sqrt{c_0^2-a_0^2}}\left(|\Delta a| + \frac{a_0}{c_0}|\Delta c|\right) \approx 0{,}00206\ \text{rad} \approx 0{,}12°$

10.31 $\frac{\partial O}{\partial r} = 2\pi\cdot(2r + h)$; $\frac{\partial O}{\partial h} = 2\pi\cdot r$; $r_0 = 14{,}2$ cm; $h_0 = 22{,}8$ cm; $O_0 = 2\pi\cdot r_0\cdot(r_0 + h_0) = 3301{,}19\ \text{cm}^2$;
$\Delta O_{max} = 2\pi\cdot(2r_0 + h_0)\cdot|\Delta r| + 2\pi r_0\cdot|\Delta h| \approx 73\ \text{cm}^2$; $O = (3301 \pm 73)\ \text{cm}^2$

10.32 $\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g}}$; $\frac{\partial T}{\partial g} = -\frac{\pi}{g}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l_0}{g_0}}$;
$\Delta T_{max}/T_0 = ½\cdot|\Delta l|/l_0 + ½\cdot|\Delta g|/g_0 = ½\cdot 0{,}5\% + ½\cdot 0{,}5\% = 0{,}5\%$

10.33 $A = (a\cdot b\cdot\sin\gamma)/2$; $a_0 = 48{,}3$ cm; $b_0 = 56{,}2$ cm; $\gamma_0 = 72°$; $A_0 = 1290{,}80\ \text{mm}^2$; $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin\gamma$;

$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sin\gamma$; $\frac{\partial A}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$; $\Delta\gamma = 0{,}5°\cdot\pi/180° = 0{,}00873$ rad (im Bogenmaß!);
$\Delta A_{max} = ½\cdot b_0\cdot\sin\gamma_0\,|\Delta a| + ½\cdot a_0\cdot\sin\gamma_0\cdot|\Delta b| + ½\cdot a_0\cdot b_0\cdot\cos\gamma_0\cdot|\Delta\gamma| \approx 8{,}6\ \text{mm}^2$; $A = (1290{,}8 \pm 8{,}6)\ \text{mm}^2$

10.34 $f = \frac{g\,b}{g+b}$; $g_0 = 392$ mm; $b_0 = 241$ mm; $\frac{\partial f}{\partial g} = \frac{b^2}{(g+b)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{g^2}{(g+b)^2}$; $f_0 = \frac{g_0\cdot b_0}{g_0+b_0} = 149{,}2449$ mm
$\Delta f_{max} = \frac{1}{(g_0+b_0)^2}\left(b_0^2\,|\Delta g| + g_0^2\,|\Delta b|\right) \approx 0{,}53$ mm; $f = (149{,}24 \pm 0{,}53)$ mm

10.35 $\alpha_0 = 35°$; $\beta_0 = 23°$; $\frac{\partial n}{\partial\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{\partial n}{\partial\beta} = -\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta}$; $n_0 = \frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0} = 1{,}468$;

$\Delta\alpha = \Delta\beta = 1°\cdot\pi/180 = 0{,}0175$ rad; $\Delta n_{max} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot|\Delta\alpha| + \left|-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta}\right|\cdot|\Delta\beta| \approx 0{,}10$; $n = 1{,}47 \pm 0{,}10$

10.36 $N_0 = 1{,}6$; $\Delta N = 1{,}6\cdot 0{,}5\% = 0{,}008$; $\alpha = 34°$; $\Delta\alpha = 1°\cdot\pi/180 = 0{,}0175$ rad;
$n_0 = \sqrt{N_0^2 - \sin^2\alpha_0} = 1{,}49910$; $\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{N}{\sqrt{N^2-\sin^2\alpha}}$; $\frac{\partial n}{\partial\alpha} = -\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{N^2-\sin^2\alpha}}$;

$\Delta n_{max} = \frac{1}{\sqrt{N_0^2-\sin^2\alpha_0}}\cdot\left(N_0\cdot|\Delta N| + \sin\alpha_0\cdot\cos\alpha_0\cdot|\Delta\alpha|\right) \approx 0{,}014$; $n = 1{,}499 \pm 0{,}014$

11 Matrizen

11.1 a) (3 x 2)–Matrix, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) quadratische Matrix der Ordnung 3, $a_{12} = 4$, $a_{21} = 1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) quadratische Matrix der Ordnung 3, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 2$, symmetrisch, $A^T = A$

d) Diagonalmatrix der Ordnung 3, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $A^T = A$

e) Einheitsmatrix der Ordnung 2, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $E^T = E$

11.2 a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) nicht möglich c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

11.3 a) $1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$ b) $2\cdot 1 - 3\cdot(-2) = 8$ c) $0+1\cdot 1\cdot 4+(-3)\cdot 4\cdot 1+0-(-3)\cdot 7\cdot 4-0-0=76$

d) $3\cdot 7\cdot 2 = 42$ e) $4\cdot 7\cdot 2+0+0-0-2\cdot(-5)\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot=84$

11.4 a) $j\cdot(-j) - 2\cdot 0 = 1$ b) $(2-j)\cdot 1-(1+2j)\cdot 3j=8-4j$ c) $2j\cdot j\cdot(-j)+0+0-0-0-0=2j$

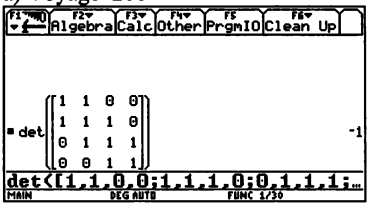
d) $2j\cdot j\cdot 1+0+1\cdot(1+j)\cdot 1-(-j)\cdot 1\cdot 2j-1\cdot 1(1+j)=-4$

11.5 a) $(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)-2=0$ oder $\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0;\ \lambda_2=3$

b) $(-1-\lambda)\cdot(1-\lambda)-8=0$ oder $\lambda^2=9 \Rightarrow \lambda_1=3;\ \lambda_2=-3$

c) $(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(5-\lambda) = 0$; Produkt–Null–Satz: $1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$; $4-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 4$;
$5-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 5$

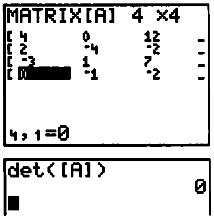
11.6 a) Voyage 200



b) Mathcad

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

TI–82 STATS



11.7 a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 12 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 12 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ d) nicht möglich

11.8 a) $5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{100}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 10 & 25 & 0 \end{pmatrix}$

11.9 a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$

11.10 a) nicht möglich b) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & -15 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$ c) nicht mögl. d) $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 23 & 23 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 10 & -2 & -20 \\ 0 & 9 & 11 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 21 & 13 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 29 & 13 & -6 \\ 23 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 8 & -9 & 15 \\ 7 & -17 & -7 \end{pmatrix}$ i) nicht möglich

j) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 19 & 15 \end{pmatrix}$ m) $\begin{pmatrix} 23 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ o) 14

11.11 a) $\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3x+4y+2z \\ -2x+y \\ 2y+5z \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2x_1+4x_2+x_3 \\ 3x_1+5x_2-2x_3 \\ x_2+3x_3+4x_4 \\ 2x_2-3x_3+5x_4 \end{pmatrix}$

11.12 a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 27 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$

b) $A+B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$; $2 \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 54 & -4 \\ 14 & -10 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 81 & 15 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 65 & 28 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$,

$(A+B) \cdot (A+B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ im Allgemeinen

c) $\det(A) = 11$; $\det(2 \cdot A) = 44$; $\det(A^2) = 121$

d) $\det(A \cdot B) = -121$; $\det(A) = 11$; $\det(B) = -11$; $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

11.13 $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$

11.14 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$, $B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$

11.15 a) $\begin{pmatrix} 4j & -2+j \\ 2+4j & -1+2j \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1-j & 5+5j \\ 1+3j & -1+3j \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1+2j & 1+2j \\ 3j & 2-j \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3-j & 2j \\ 3+5j & -2+2j \end{pmatrix}$

11.16 a) $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$; $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Matrix singulär d) $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

11.17 a) $\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2+j \\ 2-j & -2 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2+j & 2-4j \\ -1-3j & -1+2j \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 7+j & 14-8j \\ 2-4j & 4+2j \end{pmatrix}$

11.18 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1$, $\det(A^{-1}) = 1$ b) $A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 20$; $\det(A^{-1}) = 1/20$

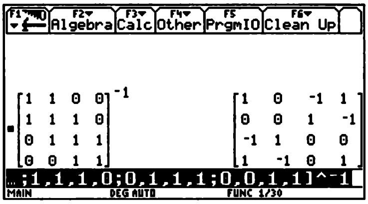
c) $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 10$; $\det(A^{-1}) = 1/10$

11.19 $A{\cdot}B=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$; $(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&2\end{pmatrix}$; $B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

11.20 a) $A{\cdot}B=E$ b) $A{\cdot}B=E$

11.21 a), b), c) Statt $A^{-1}=A^{T}$ kann auch $A^{T}{\cdot}A=E$ gezeigt werden, was besonders bei c) vorteilhaft ist

11.22 a) Voyage 200

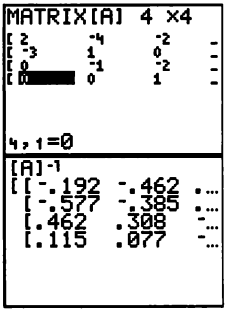


b) Mathcad (bei symbolischer Auswertung)

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\1&0&2&0\\0&2&0&0\\2&-1&-2&5\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-20&8&-6&8\\0&0&2&0\\10&-2&3&-4\\12&-4&4&-4\end{pmatrix}$$

TI–83/TI–84



11.23 a) $\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&-4&0\\0&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\7\end{pmatrix}$; $\det(A)=-5\neq 0\Rightarrow$ eindeutig lösbar; x= 4, y= 3, z= 1

b) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$; $\det(A)=9\neq 0\Rightarrow$ eindeutig lösbar; x= 2, y= 1; y= 3

c) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\11\\7\end{pmatrix}$ $\det(A)=0\Rightarrow$ entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung; versucht man auf übliche Weise zu lösen, so erkennt man, dass es hier unendliche viele Lösungen gibt.

d) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&2&0\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\12\\14\end{pmatrix}$ $\det(A)=-3\neq 0\Rightarrow$ eindeutig lösbar; x= 2, y= 3; y= 4

e) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\12\\11\end{pmatrix}$ $\det(A)=0\Rightarrow$ entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung; versucht man auf übliche Weise zu lösen, so erkennt man, dass es hier unendliche viele Lösungen gibt.

f) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&2&0\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\12\\10\end{pmatrix}$ $\det(A)=0\Rightarrow$ entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung; versucht man auf übliche Weise zu lösen, so erkennt an, dass es hier keine Lösung gibt.

11.24 x = 2, y = 5; det(A) = -0,06 nahe bei null! Lösung des geänderten Gleichungssystems: x =-8, y =10

11.25 Drehmatrix $D=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$; $\vec{x}'=D\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}-4{,}96\\0{,}60\end{pmatrix}$

11.26 Drehmatrix $D=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; Ortsvektoren: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$;

$\vec{d}=\vec{c}+(\vec{a}-\vec{b})=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $\vec{a}'=D\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}'=D\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$; $\vec{c}'=D\cdot\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$;

$\vec{d}'=D\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$; daher: A´(-1/1), B´(-1/5), C´(-5/5), D´(-5/1)

11.27 $\det(D_z)=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

11.28 $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&0\\1&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&13&13\\5&7&9\\6&12&5\\9&13&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&13&13\\5&7&9\\6&12&5\\9&13&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\50\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1800\\1050\\1150\\1800\end{pmatrix}$; € $(0{,}5\quad 1{,}0\quad 1{,}5\quad 0{,}5)\cdot\begin{pmatrix}1800\\1050\\1150\\1800\end{pmatrix}=$ € 4575

b) $\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&13&13\\5&7&9\\6&12&5\\9&13&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\35\\65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1700\\1030\\985\\1725\end{pmatrix}$; € $(0{,}5\quad 1{,}0\quad 1{,}5\quad 0{,}5)\cdot\begin{pmatrix}1700\\1030\\985\\1725\end{pmatrix}=$ € 4220

11.29 a) $W^T=\begin{pmatrix}0{,}9&0{,}2\\0{,}1&0{,}8\end{pmatrix}$; $W^T\cdot\begin{pmatrix}0{,}3\cdot 20000\\0{,}7\cdot 20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8200\\11800\end{pmatrix}$; am Ende des 1. Jahres; H_1: 8200 Kunden, 41%; H_2: 11800 Kunden, 59%

b) $(W^T)^2\cdot\begin{pmatrix}0{,}3\cdot 20000\\0{,}7\cdot 20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9740\\10260\end{pmatrix}$; am Ende des 2. Jahres: H_1: 9740 Kunden, 48,7%; H_2: 10260 Kunden, 51,3%

11.30 $A_1=\begin{pmatrix}1&R_1\\0&1\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\1/R_3&1\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1&R_2\\0&1\end{pmatrix}$; $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3=\begin{pmatrix}1+\frac{R_1}{R_3} & R_1+R_2+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}\\ \frac{1}{R_3} & 1+\frac{R_2}{R_3}\end{pmatrix}$

11.31 a) $A_1=\begin{pmatrix}1+R_1/R_3 & R_1\\ 1/R_3 & 1\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}1 & R_2\\ 1/R_4 & 1+R_2/R_4\end{pmatrix}$;

$$A=A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}1+R_1\cdot\frac{R_3+R_4}{R_3\cdot R_4} & R_1+R_2+R_1R_2\cdot\frac{R_3+R_4}{R_3\cdot R_4}\\ \frac{R_3+R_4}{R_3\cdot R_4} & 1+R_2\cdot\frac{R_3+R_4}{R_3\cdot R_4}\end{pmatrix}$$

b) $A_1=\begin{pmatrix}1&R_1\\0&1\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\1/R_3&1\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1&0\\1/R_4&1\end{pmatrix}$; $A_4=\begin{pmatrix}1&R_2\\0&1\end{pmatrix}$;

$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4$ wie in a)

Erstellt von Hans Siedler unter Mitarbeit von Wolfgang Timischl

Nach einem empirisch gut belegten Gesetz gibt es kaum Druckwerke ohne Fehler. Dementsprechend sind Hinweise zur Verbesserung erbeten an

wolfgang.timischl@schule.at oder gerald.kaiser@inode.at

Buch-Nr. 120 712
Hans Siedler, Wolfgang Timischl **Ingenieur-Mathematik 3** **Durchgerechnete Lösungen**
© Verlag E. DORNER GmbH, Wien
ISBN 978-3-7055-**0634**-3

3. Auflage, 2010